

CORRIGÉ DS 2 : Suites numériques Structures algébriques

MPSI-Maths.

Mr Mamouni : myismail1@menara.ma

Source disponible sur :

©<http://www.chez.com/myismail>

Jeudi 20 Novembre 2007.

CORRIGÉ

PROBLÈME I

PARTIE I

- 1) a) D'abord on montre par une récurrence simple que $u_n \geq 0, b_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. $\forall n \geq 1$, on a : $b_n - a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1} - 2\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}}{2} = \frac{(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2}{2} \geq 0$.
- b) $\forall n \geq 1$, on a : $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) \geq 0$, et $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0$, donc $(a_n)_{n \geq 1}$ est croissante et $(b_n)_{n \geq 1}$ décroissante, donc sont monotones.
- c) On a $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$, ainsi $(a_n)_{n \geq 1}$ est croissante majorée par b_0 et $(b_n)_{n \geq 1}$ décroissante minorée par a_0 , donc convergent, soit L_1 et L_2 leurs limites communes, de la relation $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, on en déduit que $L_1 = \frac{L_1 + L_2}{2}$, donc $L_1 = L_2$.
- 2) a) $L(a, a)$ est la limite commune de a_n et b_n quand $a_0 = b_0 = a$, dans ce cas il est facile de montrer par une récurrence simple que $a_n = a, \forall n \geq 0$, donc $L(a, a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$.

$L(b, a)$ est la limite commune de a_n et b_n quand $a_0 = b, b_0 = b$, dans ce cas les rôles de a_n et b_n sont échangés, mais comme leur limite est commune, alors $L(b, a) = L(a, b)$.

$L(\lambda a, \lambda b)$ est la limite commune de a_n et b_n quand $a_0 = \lambda a, b_0 = \lambda b$, dans ce cas chaque terme des deux suites est multiplié par λ , donc $L(\lambda a, \lambda b) = \lambda L(a, b)$.

- b) Comme $a < b$, on montre par récurrence simple que $\forall n \geq 0, a_n < b_n$, ainsi : $b_n - a_n = \frac{(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2}{2} = \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{2(\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}})^2} = \frac{1}{8c_{n-1}^2}(a_{n-1} - b_{n-1})^2$, où $c_{n-1} = \frac{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}}}{2} \in]a_{n-1}, b_{n-1}[$ car $a_{n-1} < b_{n-1}$.
- $a \leq a_{n-1} < c_{n-1} < b_{n-1} \leq b \implies \frac{1}{8b} \leq \frac{1}{8c_{n-1}} \leq \frac{1}{8a}$, d'où le résultat.
- c) $\varepsilon = 2^n$.

Méthode à suivre : Faire les calculs sur les premiers termes, remarquer la formule qui se répète, généraliser, puis la montrer par récurrence, en traitant séparément les deux cas,

$a < b$ puis $a > b$.

- d) D'après la question précédente on a : $b_3 - a_3 \leq \frac{1}{2^{22}} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$,
 mais aussi $b_4 - a_4 \leq \frac{1}{2^{46}} < 16 \cdot 10^{-15}$.

La convergence est très rapide a voir comment la différence $a_n - b_n$ diminue.

PARTIE II

- 1) a) À l'aide du changement de variable, $u = \frac{\pi}{2} - t$, on montre que $F(a, b) = F(b, a)$.

$$F(\lambda a, \lambda b) = \frac{F(a, b)}{\lambda}.$$

- b) $x \leq y \implies \cos^2 t + x^2 \sin^2 t \leq \cos^2 t + y^2 \sin^2 t, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] \implies$
 $\frac{1}{\cos^2 t + y^2 \sin^2 t} \leq \frac{1}{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] \implies f(y) =$
 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 t + y^2 \sin^2 t} dt \leq f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t} dt$, donc f
 est décroissante.

- c) En factorisant par a dans $F(a, b)$ on trouve que $F(a, b) = \frac{1}{a} f(\frac{b}{a})$.

- 2) a) $u = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \implies du = \frac{(b^2 - a^2) \cos t \sin t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} dt =$
 $\frac{\sqrt{(b^2 - u^2)(u^2 - a^2)}}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} dt$, donc $\frac{du}{\sqrt{(b^2 - u^2)(u^2 - a^2)}} = \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}$
 de plus $t = 0 \implies u = a, t = \frac{\pi}{2} \implies u = b$, d'où le résultat.

- b) Simple étude de fonctions.

- c) $h'(u) = \frac{1}{2}(1 - \frac{ab}{u^2}) = 0 \iff u = \sqrt{ab}$, donc h est strictement monotone sur les intervalles $[a, \sqrt{ab}]$ et $[\sqrt{ab}, b]$ donc ses restrictions la dedans h_1 et h_2 admettent des fonctions réciproques. Notons que $h(\sqrt{ab}) = \sqrt{ab} = \min h$.

D'autre part soit $v \geq \sqrt{ab}$, $h(u) = v \iff u^2 - 2vu + ab = 0, \delta = v^2 - ab$ donc l'équation $h(u) = v$ admet deux solutions $h_1^{-1}(v) = u_1 = v - \sqrt{v^2 - ab}, h_2^{-1}(v) = u_2 = v + \sqrt{v^2 - ab}$

- d) La première relation est un simple calcul, la deuxième s'obtient à l'aide du changement de variable $v = h(u)$ sur les intervalles $[a, \sqrt{ab}]$ et $[\sqrt{ab}, b]$.

En effet : sur $[a, \sqrt{ab}], u = v - \sqrt{v^2 - ab} \implies du = 1 - \frac{v}{\sqrt{v^2 - ab}} dv = -\frac{v - \sqrt{v^2 - ab}}{\sqrt{v^2 - ab}} dv = -\frac{u}{\sqrt{(b^2 - u^2)(u^2 - a^2)}} dv,$

d'autre part $u = a \implies v = \frac{a+b}{2}, u = \sqrt{ab} \implies v = \sqrt{ab}$, donc $\int_a^{\sqrt{ab}} \frac{du}{\sqrt{(b^2 - u^2)(u^2 - a^2)}} =$

$\frac{1}{2} \int_{\sqrt{ab}}^{\frac{a+b}{2}} \frac{dv}{\sqrt{(v^2 - ab)((\frac{a+b}{2})^2 - v^2)}} = \frac{1}{2} F(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2})$, d'après

(II,2,a), de même $\int_{\sqrt{ab}}^b \frac{du}{\sqrt{(b^2 - u^2)(u^2 - a^2)}} = \frac{1}{2} F(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2})$, d'où le résultat.

- 3) a) Par récurrence en utilisant le résultat de la question II,2,d.

- b) En tendant n vers $+\infty$, avec la notation $L = L(a, b)$, on aura $F(a, b) = F(L, L) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{L} = \frac{\pi}{2L}$.

- c) On a $a_4 \leq L(a, b) \leq b_4$, donc $\frac{\pi}{2b_4} \leq \frac{\pi}{2L(a, b)} = F(a, b) \leq \frac{\pi}{2a_4}$, d'autre part $\frac{1}{2} \leq a_4 \leq b_4 \leq 1$, donc $a_4 b_4 \geq \frac{1}{4}$ et $0 \leq b_4 - a_4 \leq 16 \cdot 10^{-15}$, de plus $\pi \leq 3,15$, donc $\frac{\pi}{2a_4} - \frac{\pi}{2b_4} = \frac{\pi}{2a_4 b_4} (b_4 - a_4) \leq 3,15 \times 32 \times 10^{-15} \leq 10^{-13}$, donc $\frac{\pi}{2b_4}$ est une valeur approchée de $\frac{\pi}{2L(a, b)}$ par défaut à 10^{-13} près, alors $\frac{\pi}{2a_4}$ l'est par excès.