MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Jeudi 20 Novembre 2007.

CORRIGÉ

PROBLÈME I

PARTIE I

1) a) **D'abord on montre par une récurrence simple que** $u_n \geq 0, b_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. $\forall n \geq 1$, **on a :** $b_n - a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1} - 2\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}}{2} = \dfrac{(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2}{2} \geq 0$.

b) $\forall n \geq 1$, **on a :** $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) \geq 0$, **et** $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} \leq 0$, **donc** $(a_n)_{n\geq 1}$ **est croissante et** $(b_n)_{n\geq 1}$ **decroissante, donc sont monotones.**

c) **On a** $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$, **ainsi** $(a_n)_{n\geq 1}$ **est croissante majorée par** b_0**et** $(b_n)_{n\geq 1}$ **decroissante minorée par** a_0, **donc convergent, soit** L_1 **et** L_2 **leurs limites communes, de la relation** $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, **on en déduit que** $L_1 = \dfrac{L_1 + L_2}{2}$, **donc** $L_1 = L_2$.

2) a) $L(a,a)$ **est la limite commune de** a_n **et** b_n **quand** $a_0 = b_0 = a$, **dans ce cas il est facile de montrer par une récurrence simple que** $a_n = a, \ \forall n \geq 0$, **donc** $L(a,a) = \lim\limits_{+\infty} a_n = a$.

$L(b,a)$ **est la limite commune de** a_n **et** b_n **quand** $a_0 = b, b_0 = b$, **dans ce cas les rôles de** a_n **et** b_n **sont échangé, mais comme leur limite est commune, alors** $L(b,a) = L(a,b)$.

$L(\lambda a, \lambda b)$ **est la limite commune de** a_n **et** b_n **quand** $a_0 = \lambda a, b_0 = \lambda b$, **dans ce cas chaque terme des deux suites est multiplié par** λ, **donc** $L(\lambda a, \lambda b) = \lambda L(a,b)$.

b) **Comme** $a < b$, **on montre par récurrence simple que** $\forall n \geq 0, \ a_n < b_n$, **ainsi :** $b_n - a_n = \dfrac{(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2}{2} = \dfrac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{2(\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}})^2} = \dfrac{1}{8c_{n-1}^2}(a_{n-1} - b_{n-1})^2$, **où** $c_{n-1} = \dfrac{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}}}{2} \in]a_{n-1}, b_{n-1}[$ **car** $a_{n-1} < b_{n-1}$.

$a \leq a_{n-1} < c_{n-1} < b_{n-1} \leq b \Longrightarrow \dfrac{1}{8b} \leq \dfrac{1}{8c_{n-1}} \leq \dfrac{1}{8a}$, **d'où le résultat.**

c) $\varepsilon = 2^n$.

Méthode à suivre : Faire les calculs sur les premièrs termes, remarquer la formule qui se répète, généraliser, puis la montrer par récurrence, en traitant séparèment les deux cas,

$a<b$ **puis** $a>b$.

d) **D'aprés la question précèdente on a :** $b_3-a_3\leq \dfrac{1}{2^{22}}<\dfrac{1}{2}.10^{-6}$, **mais aussi** $b_4-a_4\leq \dfrac{1}{2^{46}}<16.10^{-15}$.
La convergence est trés rapide a voir comment la différence a_n-b_n **diminiue.**

PARTIE II

1) a) **À l'aide du changment de variable,** $u=\dfrac{\pi}{2}-t$, **on montre que** $F(a,b)=F(b,a)$.
$F(\lambda a,\lambda b)=\dfrac{F(a,b)}{\lambda}$.

b) $x\leq y\Longrightarrow \cos^2 t+x^2\sin^2 t\leq \cos^2 t+y^2\sin^2 t,\ \forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Longrightarrow \dfrac{1}{\cos^2 t+y^2\sin^2 t}\leq\dfrac{1}{\cos^2 t+x^2\sin^2 t},\ \forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Longrightarrow f(y)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\cos^2 t+y^2\sin^2 t}dt\leq f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\cos^2 t+x^2\sin^2 t}dt$, **donc** f **est decroissante.**

c) **En factorisant par** a **dans** $F(a,b)$ **on trouve que** $F(a,b)=\frac{1}{a}f\left(\frac{b}{a}\right)$.

2) a) $u=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\Longrightarrow du=\dfrac{(b^2-a^2)\cos t\sin t}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}dt=\dfrac{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}dt$, **donc** $\dfrac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}=\dfrac{du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}}$
de plus $t=0\Longrightarrow u=a, t=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow u=b$, **d'où le résultat.**

b) **Simple ètude de fonctions.**

c) $h'(u)=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{ab}{u^2})=0\Longleftrightarrow u=\sqrt{ab}$, **donc** h **est strictement monotone sur les intervalles** $[a,\sqrt{ab}]$ **et** $[\sqrt{ab},b]$ **donc ses restrictions la dedans** h_1 **et** h_2 **admettent des fonctions réciproques.**
Notons que $h(\sqrt{ab})=\sqrt{ab}=\min h$.
D'autre part soit $v\geq\sqrt{ab}$, $h(u)=v\Longleftrightarrow u^2-2vu+ab=0, \delta=v^2-ab$ **donc l'équation** $h(u)=v$ **admet deux solutions** $h_1^{-1}(v)=u_1=v-\sqrt{v^2-ab}, h_2^{-1}(v)=u_2=v+\sqrt{v^2-ab}$

d) **La première relation est un simple calcul, la deuxième s'obtient à l'aide du changement de variable** $v=h(u)$ **sur les intervalles** $[a,\sqrt{ab}]$ **et** $[\sqrt{ab},b]$.
En effet : sur $[a,\sqrt{ab}], u=v-\sqrt{v^2-ab}\Longrightarrow du=1-\dfrac{v}{\sqrt{v^2-ab}}dv=-\dfrac{v-\sqrt{v^2-ab}}{\sqrt{v^2-ab}}dv=-\dfrac{u}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}}dv$, **d'autre part** $u=a\Longrightarrow v=\dfrac{a+b}{2}, u=\sqrt{ab}\Longrightarrow v=\sqrt{ab}$, **donc** $\displaystyle\int_a^{\sqrt{ab}}\dfrac{du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}}=\dfrac{1}{2}\int_{\sqrt{ab}}^{\frac{a+b}{2}}\dfrac{dv}{\sqrt{(v^2-ab)((\frac{a+b}{2})^2-v^2)}}=\dfrac{1}{2}F(\sqrt{ab},\dfrac{a+b}{2})$, **d'aprés (II,2,a), de même** $\displaystyle\int_{\sqrt{ab}}^{b}\dfrac{du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}}=\dfrac{1}{2}F(\sqrt{ab},\dfrac{a+b}{2})$, **d'où le résultat.**

3) a) **Par récurrence en utilisant le résultat de la question II,2,d.**

b) **En tendant** n **vers** $+\infty$, **avec la notation** $L=L(a,b)$, **on aura** $F(a,b)=F(L,L)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dt}{L}=\dfrac{\pi}{2L}$.

c) **On a** $a_4\leq L(a,b)\leq b_4$, **donc** $\dfrac{\pi}{2b_4}\leq\dfrac{\pi}{2L(a,b)}=F(a,b)\leq\dfrac{\pi}{2a_4}$, **d'autre part** $\dfrac{1}{2}\leq a_4\leq b_4\leq 1$, **donc** $a_4b_4\geq\dfrac{1}{4}$ **et** $0\leq b_4-a_4\leq 16.10^{-15}$, **de plus** $\pi\leq 3,15$, **donc** $\dfrac{\pi}{2a_4}-\dfrac{\pi}{2b_4}=\dfrac{\pi}{2a_4b_4}(b_4-a_4)\leq 3,15\times 32\times 10^{-15}\leq 10^{-13}$, **donc** $\dfrac{\pi}{2b_4}$ **est une valeur approchée de** $\dfrac{\pi}{2L(a,b)}$ **par défaut à** 10^{-13} **prés, alors** $\dfrac{\pi}{2a_4}$ **l'est par excés.**