

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَعَلَى اللَّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ الْمُتَوَكِّلُونَ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

DS 2 (08-09): Complexes et Dev. Limités Équations différentielles

Sup-MPSI, CPGE G.S. High Tech, Rabat



Lundi 24 Novembre 2008
Durée : 3heures

Citations du jour :

- On sourit aux soustractions des mathématiciens. On frémit en songeant à celles que pourrait faire un chirurgien (Sacha Guitry).
- Les mathématiciens sont comme les français : quoique vous leur dites ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent Goethe

Mathématiciens du jour :

Riccati

Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) était un physicien et mathématicien italien, père de Vincenzo Riccati et de Giordano Riccati. Ses travaux en hydraulique (canaux de Venise) et en acoustique le conduisent à résoudre des équations différentielles du second ordre en les réduisant au 1er ordre et plus généralement à rechercher des méthodes de séparation des variables afin d'obtenir les solutions par simples quadratures. Ses travaux furent publiés après sa mort par ses fils à partir de 1764 sous le titre Opere del conte Jacopo Riccati. Il est en particulier connu pour l'équation de Riccati.



Nombre total de points : 42, le DS sera noté sur 40

Présentation et rédaction : 4points

Exercice 1 .

- 1) (4 points) Résoudre $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t \sin t + te^{2t}$.
- 2) (3 points) Déterminer $\lim_0 \frac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1+x^3} - 1}$.

Exercice 2 .

source : DS MPSI, France (Pr Bechata)

Calculer les sommes suivantes, lorsqu'elles existent (!) :

- 1) (2 points) $A_n = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx$.
- 2) (1 point) $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k$.
- 3) (3 points) $C_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos kx}{(\cos x)^k}$

Exercice 3 . source : DS MPSI, France (Pr Bechata)
On considère un entier naturel non nul p ainsi que l'équation sur \mathbb{C} donnée par

$$(E_p) : pz^p = z^{p-1} + \dots + z + 1.$$

- 1) (1+2 pts) Résoudre les équations $(E_2) : 2z^2 = z + 1$ et $(E_3) : 3z^3 = z^2 + z + 1$.
- 2) (1pt) Une solution de (E_p) peut-elle être de module strictement supérieur à 1 ?
- 3) Soit $e^{i\theta}$ une solution de (E_p) de module 1 autre que 1.
 - a) (2pts) Justifier que $e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}} = \frac{\sin \frac{p\theta}{2}}{p \sin \frac{\theta}{2}}$.
 - b) (1pt) En déduire une contradiction.

Problème

Concours Petites mines, 1998.

Dans toute la suite, le plan est rapporté au repère orthonormé canonique (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère l'équation différentielle :

$$(E) : (1 + x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x}$$

- 1) (1pt) Préciser les intervalles d'études.
- 2) (2pts) Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* .
- 3) Pour tout réel λ , on définit la fonction f_λ sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x > 0 \quad f_\lambda(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1 + x^2}$$

et on note (C_λ) sa courbe représentative.

- a) (2pts) Soit $M(\alpha, \beta)$ un point du plan avec $\alpha > 0$. Montrer que par M passe une et une seule courbe C_λ .
- b) (1pt) Montrer que pour tout réel λ , la fonction f_λ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .
- c) (2pts) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'_\lambda(x)$ est du signe de :

$$g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2(\ln x + \lambda)$$
- d) (2pts) Étudier les variations de g_λ . On montrera en particulier que l'équation $g_\lambda(x) = 0$ admet une et une seule solution sur \mathbb{R}_+^* ; cette solution sera notée m_λ .
- e) (1+1+1 pt) Dresser le tableau de variations de f_λ . On calculera les limites de f_λ en 0 et en $+\infty$, et on montrera que $f_\lambda(m_\lambda) = 1/(2m_\lambda^2)$.
- f) (1pt) Représenter sur un même graphique les courbes $(C_{-1}), (C_0)$ et (C_1) .
- 4) Dans cette question, on cherche un équivalent de m_λ lorsque λ tend vers $+\infty$.
 - a) (2pts) Montrer que pour λ assez grand, on a :

$$\frac{1}{\lambda} \leq m_\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

- b) (2pts) En déduire, à l'aide des questions précédentes, que :

$$\lim_{+\infty} \sqrt{2\lambda} m_\lambda = 1$$

Fin
Bonne chance