Devoir Libre : *Déterminants* *Systèmes linéaires.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

On se propose dans ce problème d'inverser, quand c'est possible, la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$$

Où les a_i sont des réels deux à deux distincts.
Pour cela on pose, pour tout réel x

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} r_1+x & a+x & \dots & a+x \\ b+x & r_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \dots & b+x & r_n+x \end{vmatrix}$$

Où a et b des réels donnés, les r_i sont des réels deux à deux distincts.
Enfin, on pose $\Delta = \Delta(0)$.

1) Justifier l'existence de deux réels A et B tel que $\Delta(x) = Ax + B$, pour tout réel x.
Indication : On pourra utiliser des opérations sur lignes ou colonnes pour simplifier $\Delta(x)$.

2) On se propose dans cette question de calculer Δ.
Pour cela on pose $P(X) = \prod_{i=1}^{n} r_i - X$.

a) On suppose dans cette question que $a \neq b$, montrer que : $\Delta = \dfrac{aP(b) - bP(a)}{a-b}$.

b) On suppose dans cette question que $a = b$, montrer que : $\Delta = P(a) - aP'(a)$.
Indication : Penser à tendre $b = a + \varepsilon$ dans la question précédente, puis tendre ε vers 0 dans la question précédente, en justifiant cette démarche.

3) En déduire, $\det A$, puis une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible, laquelle condition sera supposée vérifiée dans toute la suite du problème, et on se propose alors d'inverser A, pour cela on essayera de résoudre l'équation : $AX = Y$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On pose $s = \sum_{i=1}^{n} x_i, p = \prod_{i=1}^{n} x_i$ et $p_i = \prod_{\substack{1 \le j \le n \\ j \neq i}} x_j$

a) Montrer que :

i. $s + a_i x_i = y_i, \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$.
Indication : Penser à traduire l'équation $AX = Y$ sous forme d'un système linéaire.

ii. $\det A = p + \sum_{i=1}^{n} p_i$, puis $s = \dfrac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} p_i y_i$.

b) Exprimer les x_i en fonction des y_i, puis en déduire A^{-1}.

c) Vérifier le résultat trouvé dans le cas $n = 2$.

Fin.