CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
رَبِّي إِشرَح لِي صَدرِي وَ يَسِّر لِي أَمرِي وَ
أَحلُل عُقدَة مِن لِسَانِي يَفقَهُوا قَولِي

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم
سورة طه

DS 9: *Matrices Déterminants*

Lundi 15 Juin 2009
Durée : 4 heures

Blague du jour :
Un homme se rend aux urgences et dit au chirurgien :
- Il y a 2 ans j'ai avalé une pièce de 2 euros pouvez vous m'opérer docteur ?
- Il ya 2 ans dites vous ? Mais pourquoi n'êtes vous pas venu plutôt ?
- Parce qu'à l'époque mes affaires marchaient bien, je n'avais pas besoin d'argent !

Mathématicien du jour — ***Hamilton***
Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) est un mathématicien, physicien et astronome irlandais, connu pour sa découverte des quaternions, mais il contribua aussi au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre et de la mécanique quantique.
Enfant prodige, à l'âge de 13 ans, il parlait déjà 13 langues, dont persan, l'arabe, l'hindousthânî, le sanskrit et le malais. Il est connu pour son théorème avec Cayley qui dit que le polynôme caractéristique d'une matrice est un polynôme annulateur pour cette matrice.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- **Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.**
- **L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.**
- **Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.**
- **Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.**
- **Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.**
- **Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.**
- **Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.**
- **Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.**
- **Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.**

PROBLÈME : **Source : CNC-2008, BCPST.**

Notations et rappels

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels. On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réel ; la matrice identité se notera I_2 et toute matrice de la forme λI_2, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est dite *une matrice scalaire*.

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont dites *semblables* dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$, cela revient à dire que A et B sont les matrices d'un même endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans deux bases en général différentes.

L'ensemble $\mathscr{S}(A) := \{PAP^{-1};\ P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\}$ est appelé *la classe de similitude* de A.

I. Résultats préliminaires

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser une matrice diagonale qui soit semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice A.
2. Montrer que si A, B et C sont des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que A et B soient semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et B et C le soient elles aussi alors les matrices A et C sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. **Trace d'une matrice :** Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle trace de A le réel noté $\mathrm{tr}\,(A)$ et défini par $\mathrm{tr}\,(A) = a + d$.
   (a) Montrer que si $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\big)^2$ et λ un réel alors $\mathrm{tr}\,(\lambda A + B) = \lambda\,\mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B)$.
   (b) Montrer que si $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\big)^2$ alors $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$.
   (c) En déduire que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(B)$.
4. **Déterminant d'une matrice :** Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle déterminant de A le réel noté $\det A$ et défini par $\det A = ad - bc$.
   (a) Montrer que si $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\big)^2$ alors $\det AB = \det A \det B$.
   (b) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$ et exprimer l'inverse de A en fonction de $\det A$, a, b, c et d.
   (c) Montrer que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\det A = \det B$.
5. **Polynôme caractéristique d'une matrice :** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme noté χ_A et défini par $\chi_A(x) = \det(A - xI_2),\ \ x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\chi_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}\,(A)x + \det A,\ x \in \mathbb{R}$.
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; montrer que λ est une valeur propre de A si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$.
   (c) On note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A qu'on appellera *le spectre* de A ; montrer que $\mathrm{Sp}(A) \neq \emptyset$ si et seulement si $(\mathrm{tr}\,(A))^2 - 4\det A \geqslant 0$.
   (d) Montrer que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, elles ont le même polynôme caractéristique.
   Étudier la réciproque en utilisant les matrices I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (e) Montrer que la matrice $A^2 - \mathrm{tr}\,(A)A + \det A\, I_2$ est nulle.

6. **Suites de matrices :** Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; on suppose que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$.

   Définition : On dit que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice A si les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les réels a, b, c et d.

   (a) Justifier que si la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice A alors A est unique.

   (b) Montrer que si la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice A alors les suites $(\mathrm{tr}\,(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\det A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\mathrm{tr}\,(A)$ et $\det A$.

II. Réduction des matrices carrées réelles d'ordre 2

On vient de voir que le spectre $\mathrm{Sp}(A)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des racines réelles de son polynôme caractéristique χ_A ; ainsi $\mathrm{Sp}(A)$ est soit un singleton, soit une paire soit vide.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice ; on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A, ce qui revient à dire que A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$; montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = \lambda I_2$.

2. Si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$ et A non diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soit e'_1 un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ et e'_2 un vecteur tel que la famille (e'_1, e'_2) soit une base de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Montrer que la matrice de f dans la base (e'_1, e'_2) est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

   (b) Justifier que $\beta = \lambda$ et $\alpha \neq 0$.

   (c) Calculer le produit matriciel $\begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et en déduire que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

3. Si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$, on note e'_1 (respectivement e'_2) un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ (respectivement μ).

   (a) Justifier que (e'_1, e'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice de f dans cette base.

   (b) Justifier que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

4. Si $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$.

   (a) Justifier que $4\det A - (\mathrm{tr}\,(A))^2 > 0$.

   Dans la suite, on pose

$$A' = \frac{2}{\delta}\Big(A - \frac{\mathrm{tr}\,(A)}{2} I_2\Big) \text{ et } A'' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{tr}\,(A) & -\delta \\ \delta & \mathrm{tr}\,(A) \end{pmatrix} \text{ avec } \delta := \sqrt{4\det A - (\mathrm{tr}\,(A))^2}.$$

   (b) Montrer que $A'^2 = -I_2$.

   (c) On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A' et on considère un vecteur non nul e de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $(e, g(e))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice A_1 de g dans cette base.

   (d) Exprimer A' en fonction de A_1 et en déduire que les matrices A et A'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Étude des classes de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

A. Cas des matrices scalaires

1. Préciser la classe de similitude d'une matrice scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Pour tout réel λ, on pose $E_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que, pour tout réel λ, les matrices E_λ et F_λ sont inversibles et exprimer leur inverses.
   (b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; calculer les produits matriciels $E_\lambda A E_\lambda^{-1}$ et $F_\lambda A F_\lambda^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. On suppose que la classe de similitude $\mathscr{S}(A)$ de la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est réduite à un singleton, ce qui signifie que, pour toute matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $PAP^{-1} = A$. Montrer que A est une matrice scalaire.

B. Pour qu'une classe de similitude soit fermée

Définition : Une partie $\mathscr{L}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est dite *fermée* si toute suite convergente d'éléments de $\mathscr{L}$ converge vers un élément de $\mathscr{L}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice scalaire ; justifier que la classe de similitude $\mathscr{S}(A)$ de A est fermée.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$ et A non diagonalisable ; on pose $A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A_k appartient à $\mathscr{S}(A)$.
   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer les coefficients de la matrice A_k et en déduire que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B à préciser.
   (c) La matrice B est-elle un élément de $\mathscr{S}(A)$? la classe $\mathscr{S}(A)$ est-elle fermée ?
3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$; soit $\left(P_k A P_k^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{S}(A)$ qui converge vers une matrice $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(P_k(A - xI_2)P_k^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $C - xI_2$. (*On posera* $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *et* $P_k A P_k^{-1} = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$).
   (b) En déduire que, pour tout $x \in \{\lambda, \mu\}$, $\det(C - xI_2) = 0$.
   (c) Conclure que C est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ puis justifier que $C \in \mathscr{S}(A)$.
   (d) Qu'est-ce qu'on vient de montrer ?
4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$; soit $\left(P_k A P_k^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{S}(A)$ qui converge vers une matrice $\tilde{A}$ élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\mathrm{tr}\,(\tilde{A}) = \mathrm{tr}\,(A)$ et $\det\tilde{A} = \det A$. (*On pourra utiliser les préliminaires*).
   (b) Donner une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, aux matrices A et $\tilde{A}$.
   (c) Conclure que la classe de similitude $\mathscr{S}(A)$ est fermée.
5. Montrer que la classe de similitude $\mathscr{S}(A)$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou bien $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$.

Fin
Bonne chance