

**Devoir Surveillé N°4**  
**Jeudi le:26-Décembre-2002**

Durée:3h30mn

Programme:Developpemnts limité,courbes,arithmetique,fonctions réelles

1. (1.5 point) Donner un  $DL_3(0)$  de  $f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{\cot \tan(x)}$ , en deduire l'équation de la tangente en 0 ainsi que sa position par rapport a la courbe
2. (1.5 point) Etudier les branches infinies (equation et position) en  $+\infty$  pour  $f(x) = x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$
3. (1.5 point) Donner la partie principale en 0 de  $f(x) = \cos(x)^{\sin(x)} - 1$
4. On considère l'arc géométrique  $(\gamma)$  défini par : 
$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{t^2+t-2} \\ y(t) = \frac{t^2-2t}{t-1} \end{cases}$$
  - a. (0.5 point) Dresser le tableau de variation de  $(\gamma)$
  - b. (0.5 point) Etudier les branche infinies
  - c. (1 point) Construire  $(\gamma)$
5. On considère l'arc géométrique  $(\gamma)$  défini par : 
$$\begin{cases} x(t) = \frac{2t}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{4(1-2t)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$
  - a. (0.5 point) Dresser le tableau de variation de  $(\gamma)$
  - b. (1 point) Etudier le point stationnaire
  - c. (0.5 point) Etudier les branche infinies
  - d. (1 point) Construire  $(\gamma)$
6. Soit  $n \in \mathbb{N}, a \geq 2$  et soient  $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$  tel que :  $m \geq n$ . on pose  $m = qn + r$  avec  $0 \leq r < n$ ,
  - a. (0.5 points) montrer que :  $\exists b \in \mathbb{N}; a^m - 1 = (a^n - 1)b + a^r - 1$ .
  - b. (0.75 points) Montrer que :  $(a^m - 1)^n = a^{m^n} - 1$ .
  - c. (0.25 points) Montrer que :  $(a^m - 1)/(a^n - 1) \text{ ssi } m/n$ .
  - d. (0.5 points) Soit  $N_k$  le nombre qui s'écrit avec  $k$  chiffres 1 en base 10, montrer que :  $\forall (h, k) \in (\mathbb{N}^*)^2, N_h/N_k \Leftrightarrow h/k$ .
7. on appelle fonction polynomiale toute fonction de la forme suivante:  $g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ,  $n$  s'appelle degré de  $P$  et  $a_n$  son coefficient dominant
  - a. Soit  $g$  une fonction polynomiale montrer que:
    - i. (0.75 points)  $g$  paire  $\Rightarrow \forall k \in \left[ \left|0, E\left(\frac{n-1}{2}\right)\right| \right], a_{2k+1} = 0$
    - ii. (0.75 points)  $g$  impaire  $\Rightarrow \forall k \in \left[ \left|0, E\left(\frac{n-1}{2}\right)\right| \right], a_{2k} = 0$dans toute la suite on pose  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  si  $x \neq 0, f(0) = 1$
  - b. (0.75 points) montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ , ils existent  $g_n, h_n$  deux fonction polynomiales telles que:  $f^{(n)}(x) = \frac{g_n(x)\sin^n(x) + h_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}, \forall x \neq 0$
  - c. (0.25 points) exprimer  $P_{n+1}$  et  $Q_{n+1}$  en fonction de  $P_n$  et  $Q_n$
  - d. (0.75 points) préciser le degré, le coefficient dominant et la parité de  $P_n$  et  $Q_n$  suivant les valeurs de  $n$
  - e. (0.5 points) en partant de la relation  $xf(x) = \sin(x)$  et en appliquant la formule de Leibniz, trouver une autre relation liant  $P_n$  et  $Q_n$  avec  $P_{n-1}$  et  $Q_{n-1}$
  - f. (0.5 points) en déduire que  $P_n' = Q_n$  puis que  $P_n$  est solution d'une équation différentielle très simple
  - g. (1.5 points) en déduire les coefficients de  $P_n$  puis ceux de  $Q_n$
  - h. (0.75 points) en déduire  $f^{(5)}(x), \forall x \neq 0$

**Barème multiplié par 2**