DS 6 : *Développements limités et Polynômes*

Jeudi le 04 Mars 2004

CORRIGÉ

PROBLÈME :

PARTIE I

1)a)i) $deg(P) = p \Rightarrow deg(\Delta(P)) = p - 1; co(P) = a_p \Rightarrow co(\Delta(P)) = pa_p$.

ii) Δ est déjà lineaire.
$P \in E_n \Rightarrow deg(P) \leqslant n \Rightarrow deg(\Delta) = deg(P) - 1 \leqslant p - 1 \leqslant n \Rightarrow \Delta(P) \in E_n \Rightarrow \Delta : E_n \longrightarrow E_n$ donc Δ endomorphisme sur E_n .

b)i) $\ker \Delta_n$ est formé par les constantes vu dans le cours.

ii) D'aprés la forule du rang : $rg(\Delta_n) = dim(E_n) - dim(\mathbb{K}er\Delta_n) = n + 1 - 1 = n$ .Vu aussi dans le cours.

2a)i) $\Delta(N_k)(X) = N_k(X + 1) - N_k(X) = N_{k-1}(X)$.

ii) $\Delta(N_0) = 0$.

iii) $j \leqslant k \Rightarrow \Delta^j(N_k) = N_{j-k}$ par récurrence sur j,en particulier : $\Delta^j(N_k)(0) = N_{j-k}(0) = 0$ si $j<k$ mais $\Delta^k(N_k)(0) = 1$.Pour le second cas : $j = k + 1 \Rightarrow \Delta^j(N_k) = \Delta\Delta^k(N_k) = \Delta(N_0) = 0$ et ainsi si $k>j$ on a : $\Delta^j(N_k) = 0$.

b)i) Comme $\mathcal{C}ard(N_0, N_1, \ldots, N_n) = n + 1 = dim(E_n)$ il suffit de montrer qu'elle est libre, on peut raisonner par récurrence sur n .
$\alpha_0 N_0 + \alpha_1 N_1 + \ldots + \alpha_n N_n = 0 \Rightarrow \Delta^n (\alpha_0 N_0 + \alpha_1 N_1 + \ldots + \alpha_n N_n) = \Delta^n(0) = 0$
$\Rightarrow \alpha_0\Delta^n N_0 + \alpha_1\Delta^n N_1 + \ldots + \alpha_n\Delta^n N_n = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0$

ii) $P = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \ldots + a_n N_n \Rightarrow \Delta^j P(0) = a_0\Delta^j N_0(0) + a_1\Delta^j N_1(0) + \ldots + a_n\Delta^j N_n(0) = \alpha_j$ en utilisant le résultat 2.a)iii) $\Delta^j N_k(0) = 0$ si $j \neq k$ et $\Delta^j N_j(0) = 1$.

3)a) Par récurrence sur k.

3b)i) $\Delta^j = (T - Id_{\mathcal{F}})^j = \sum\limits_{k=0}^{j} C_j^k T^k (-1)^{j-k}$ .On a le droit d'appliquer la formule de binôme de Newton car $T; Id_{\mathcal{F}}$ commutent .

ii) $\Delta^j(f)(0) = \sum\limits_{k=0}^{j} C_j^k T^k(f)(0)(-1)^{j-k} = \sum\limits_{k=0}^{j} C_j^k f(0 + k)(-1)^{j-k} = \sum\limits_{k=0}^{j} C_j^k f(k)(-1)^{j-k}$

PARTIE II

1)a) Vu en TD : montrer la linéarité,l'injection et remarquer pour la dimension .

b) $P_f = \Phi^{-1}\big(P(0), \ldots, P(n)\big)$ .Vu en TD dans l'interpolation .

2)a) D'aprés 3.b)i) de la partie I on a :
$\big(\Delta^j(f)\big)(0) = \sum\limits_{k=0}^{j} C_j^k (f(k)(-1)^{j-k} = \sum\limits_{k=0}^{j} C_j^k P_f(k)(-1)^{j-k} = \big(\Delta^j(P_f)\big)(0).$

b) D'parés 2.b)ii) de la partie I on a :
$P_f = \big(\Delta^0(P_f)\big)(0)N_0 + \big(\Delta^1(P_f)\big)(0)N_1 + \ldots + \big(\Delta^n(P_f)\big)(0)N_n = \big(\Delta^0(f)\big)(0)N_0 + \big(\Delta^1(f)\big)(0)N_1 + \ldots + \big(\Delta^n(f)\big)(0)N_n$

3a) l'astuce ici est qu'entre 2 racines de φ se trouve une racine de φ' à l'aide du théoéme de Rolle et donc entre $n+2$ racines de φ se trouvent $n+1$ racines de φ' et donc n racines de φ'' , ... et à la fin une racine de $\varphi^{(n+1)}$ .En prenant $K = \frac{f(x)-P_f(x)}{N(x)}$ on a φ admet $n+2$ racines qui sont $0, 1, \ldots, n$ et x .Donc $\exists c \in]0, n[$ tel que : $\varphi^{(n+1)}(c) = 0$ c-à-d : $f^{(n+1)}(c) - P_f^{(n+1)}(c) - KN^{(n+1)}(c)$ or $deg(P_f) = n$ donc $P_f^{(n+1)} = 0$ et $deg(N) = n+1$ et unitaire donc $N^{(n+1)} = (n+1)!$ d'où le résultat en tenant compte de l'égalité : $K = \frac{f(x)-P_f(x)}{N(x)}$.

b) vrai pour $n = 0$.
Supposons le résultat vrai pour n et soit $x \in [0, n+1]$,si $x \in [0, n]$ on a :
$|N(x)| = |x(x-1)\ldots(x-n)| \times |(n+1-x)| \leq n! \times (n+1)$ par hypothése de récurrence , donc $\big|N(x)\big| \leqslant (n+1)!$
Si $x \in [n, n+1]$ on écrit $|N(x)| = |(x-1)(x-2)\ldots(x-n)\times(x-1-n)|\times x = |y(y-1)\ldots(y-n)|\times x \leq n! \times (n+1)$ en posant $y = x-1 \in [0, n]$.

EXERCICES :

1. $\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4-a^2b^2}{6b^2}x^2 + o(x^2)$.
2. $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
3. $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
4. $\sqrt{1+2x+2x^2} - \sqrt[3]{1+3x+3x^2} = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.
5. $h(x) = x\left(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x}\right) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8} + \frac{13}{48x} + o(x)$.

FIN

© : www.chez.com/myismail
Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc