DS 6 : Espaces vectoriels Fractions rationnelles Developpements limités

Corrigé

Problème I :

1. (a) $\phi(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)dt = \int_0^1 f(x+u-1)du$, en utilisant le changement de variable : $u = t - x + 1$.

   (b) On suppose la fonction f paire, donc $\phi(f)(-x) = \int_{-x-1}^{-x} f(t)dt = \int_{-x-1}^{-x} f(-t)dt = \int_{x}^{x+1} f(u)du = \phi(f)(x+1)$.
   On suppose la fonction f impaire, donc $\phi(f)(-x) = \int_{-x-1}^{-x} f(t)dt = -\int_{-x-1}^{-x} f(-t)dt = -\int_{x}^{x+1} f(u)du = -\phi(f)(x+1)$.

   (c) En posant $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, on a $\phi(f)(x) = F(x) - F(x-1)$
   On suppose la fonction f croissante, donc
   $\phi(f)'(x) = F'(x) - F'(x-1) = f(x-1) - f(x) \geq 0$, d'où $\phi(f)(x)$ aussi croissante et de même pour le cas où f est décroissante.

   (d) On suppose la fonction f convexe. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\phi(f)$ est classe $\mathcal{C}^2$, avec $\phi''(f) = f'(x-1) - f'(x) \geq 0$ car f' est croissante puisque f est convexe, d'où $\phi(f)$ est aussi convexe. Ainsi si f est convexe et de classe $\mathcal{C}^1$ on peut affirmer que $\phi(f)$ est aussi convexe mais si f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$, on ne peur rien affirmer en ce qui concerne la convexité de $\phi(f)$, et de manière pareille on raisonne lorsque f est concave.

   (e) Si par exemple, $\lim\limits_{+\infty} f(t) = L$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$ tel que : $x > A \implies |f(x) - L| \leq \varepsilon$, donc $\forall x > A$ on a : $|\phi(f)(x) - L| = |\int_{x-1}^{x} f(t)dt - L| = |\int_{x-1}^{x} (f(t) - L)dt| \leq \int_{x-1}^{x} |f(t) - L|dt \leq \int_{x-1}^{x} \varepsilon dt = \varepsilon$, d'où $\lim\limits_{+\infty} \phi(f) = L$, pareil en $-\infty$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$ montrons que $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, pour cela et par linéarité de l'intégrale il suffit de montrer que $\phi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X], \forall k \in [|0, n|]$, en effet :
   $\phi(X^k)(x) = \int_{x-1}^{x} t^k dt = \frac{x^{k+1} - (x-1)^{k+1}}{k+1} = \frac{(k+1)x^k + \ldots + (-1)^k}{k+1} \in \mathbb{R}_n[X]$.

3. (a) $\phi(f)'(x) = f(x) - f(x-1)$ est continue, en tant que différence de deux fonction continues, d'où $\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

   (b) Soit $f \in \operatorname{Ker} \phi$, donc $\phi(f)(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ en particulier $\phi(f)(1) = \int_0^1 f(t)dt = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R} :\quad \phi(f)'(x) = f(x-1) - f(x) = 0$, d'où f est –1–périodique, donc 1–périodique.

Inversement soit f une fonction 1–périodique et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, montrons que $f \in \operatorname{Ker}\phi$. En effet, $\phi(f)'(x) = f(x-1) - f(x) = 0$ car f est 1–périododique, d'où $\phi(f)$ est constante, en particulier $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $\phi(f)(x) = \phi(f)(1) = \int_0^1 f(t)dt = 0$, d'où $\phi(f) = 0$ et par suite $f \in \operatorname{Ker}\phi$.

(c) L'endomorphisme ϕ ne peut pas être injectif car son noyau est non nul, puisque contient les fonctions 1–périodiques et d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Il ne peut non plus être surjectif car son image est formée par les applications de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, ainsi par exemple la valeur absolue qui est continue sans être classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ne peut pas être dans l'image donc n'admet pas d'antécédants par ϕ.

4. (a) Noter bien que f de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \implies \phi(f)$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$.
Soit f une fonction propre associée à une valeur propre $\lambda \neq 0$, c'est à dire $\phi(f) = \lambda f$ avec $\lambda \neq 0$ alors $f = \frac{\phi(f)}{\lambda}$.
Montrons par récurrence sur k que f est de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}), \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
Pour $k = 0$ c'est vrai par hypothèse.
Supposons f de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, alors $\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$, donc $f = \frac{\phi(f)}{\lambda}$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$.
Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}), \quad \forall k \in \mathbb{N}$, d'où f est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que : $\phi(P) = \lambda P$, on dérive cette égalité, d'où $P(X) - P(X-1) = \lambda P'(X)$, posons $P(X) = a_n X^0 + \ldots + a_0$ tel que : $a_n \neq 0$ le coeefficients de X^{n-1} dans $P(X) - P(X-1)$ est le même que celui dans $-a_n(X-1)^{n-1}$ qui est $-na_n$ et celui de X^{n-1} dans $\lambda P'(X)$ est $n\lambda a_n$, comme $a_n \neq 0$ alors $\lambda = -1$ et alors les polynômes propres sont ceux solutions de l'équation différentielle : $P(X) - P(X-1) + P'(X) = 0$.

(c) Vérification : $\phi(f)(x) = \int_{x-1}^x e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha x} - e^{\alpha(x-1)}}{\alpha} = e^{\alpha x}\frac{1-e^{-1}}{\alpha}$, prendre donc $\alpha = \frac{1-e^{-1}}{\lambda}$.
ainsi tout réel, $\lambda > 0$ est une valeur propre de ϕ, car admet toujour une fonction propre.

Problème II :

1. Parceque 1 et –1 sont des pôles simples de F alors que les a_k sont doubles.
2. $\alpha = \lim\limits_{X \to 1} (X-1)F(X) = \frac{1}{2Q^2(1)}$ et $\beta \lim\limits_{X \to -1} (X+1)F(X) = -\frac{1}{2Q^2(-1)}$.
3. $\beta_k = \lim\limits_{X \to a_k} (X-a_k)^2 F(X) = \lim\limits_{X \to a_k} \frac{1}{(X^2-1)\left(\frac{Q(X)}{X-a_k}\right)^2} = \frac{1}{(a_k^2-1)Q'(a_k)}$ car $Q(a_k) = 0$.
4. Posons $G(X) = (X-a_k)^2 F(X)$, alors $G(X) = \alpha_k(X-a_k) + \beta_k + (X-a_k)^2 S(X)$, on trouve que $G'(a_k) = \alpha_k$, d'autre part $G(X) = \frac{1}{(X^2-1)Q_1(X)^2}$, d'où $\alpha_k = \frac{(a_k^2-1)Q_1'(a_k) + 2a_k Q_1(a_k)}{(a_k^2-1)Q_1^2(a_k)}$. avec $Q_1(X) = \left(\frac{Q(X)}{X-a_k}\right)^2$ et la formule de Taylor affirme que :
$Q(X) = Q'(a_k)(X-a_k) + \frac{Q``(a_k)}{2}(X-a_k)^2 + \ldots + \frac{Q^{(n)}}{n!}(X-a_k)^n$ car $Q(a_k) = 0$, d'où $Q_1(X) = Q'(a_k) + \frac{Q``(a_k)}{2}(X-a_k) + \ldots + \frac{Q^{(n)}}{n!}(X-a_k)^{n-1}$ et donc $Q_1(a_k) = Q'(a_k)$ et $Q_1'(a_k) = Q``(a_k)$, d'où $\alpha_k = \frac{(a_k^2-1)Q''(a_k) + 2a_k Q'(a_k)}{(a_k^2-1)^2 Q'^2(a_k)}$.
5. On pose $P(X) = (X^2-1)Q''(X) + 2XQ'(X)$.
   (a) $d^\circ Q = n$, donc $d^\circ(X^2-1)Q''(X) = n$ et $d^\circ 2XQ'(X) = n$, d'autre part :
   $\mathrm{co}(X^2-1)Q''(X) = \mathrm{co}Q`` = n(n-1)$ et $\mathrm{co}2XQ'(X) = 2\mathrm{co}Q' = 2n$ avec
   $n(n-1) + 2n = n^2 + n = n(n+1) \neq 0$, d'où $d^\circ P = n$ et $\mathrm{co}(P) = n(n+1)$.
   (b) $(\alpha_k = 0 \quad \forall k \in [|1,n|]) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $P(a_k) = 0 \quad \forall k \in [|1,n|]$, ainsi P et Q sont deux polynômes de degré n et ayant les mêmes racines donc sont proportionnels.
   (c) On a : $P = \lambda Q$ et $\mathrm{co}Q = 1$, d'où $\lambda = \mathrm{co}P = n(n+1)$.

(d) Dans le cas particulier où $n = 2$ on aurait l'équation différentielle suivante : $(X^2 - 1)Q''(X) + 2XQ'(X) = 6Q(X)$ avec Q de degré 2 et unitaire, donc $Q(X) = X^2 + aX + b$, l'équation devient alors : $2(X^2 - 1) + 2X(2X + a) = 6X^2 + 6aX + 6b$ ou bien $6X^2aX - 2 = 6X^2 + 6aX + 6b$, donc $a = 0$ et $b = -\frac{1}{3}$.

Exercices de calcul.

1. Commençons par une première décomposition à l'aide de Maple.

```
> convert((x^3-x)/((x**2-1)**2*(x**2+1)),parfrac,x);
```

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1}$$

   Et on conclut avec l'égalité : $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}\right)$.

2. On écrit l'expression sous sa forme exponenteille puis on fera les calculs à l'aide de Maple.

```
> series(exp((n+1)/n*ln(n+1))-exp(n/(n-1)*ln(n)),n=infinity,1);
```

$$1 + \mathrm{O}(\frac{1}{n})$$

   D'où la limite de la suite est 1.

3. On fera le changement de varaible $u = x - 1$ et on demandera à Maple encore une fois les calculs :

```
> series(-ln(1-u)/tan(pi*u/2),u=0,1);
```

$$2\,\frac{1}{\pi} + \mathrm{O}(u)$$

   D'où la limite en 1 est : $\frac{2}{\pi}$.

4. Faisons les calculs une dérnière fois à l'aide de Maple, d'où

```
> series(x*exp(x*ln(1+1/x))-exp(1)*x**2*ln(1+1/x),x=infinity,3);
```

$$\frac{1}{8}\,\frac{e}{x} - \frac{3}{16}\,\frac{e}{x^2} + \mathrm{O}(\frac{1}{x^3})$$

   Ainsi l'équation de l'asymptote à l'infini est : $\frac{e}{8x}$ et se trouve en dessus de la courbe car $-\frac{3e}{16x^2} < 0$.

FIN DU CORRIGÉ.
ET À LA PROCHAINE.