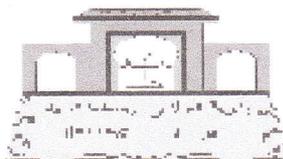


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ إِنَّمَا أَدَّبْتُ الْقُرْآنَ وَمَا أَدَّبُتُ إِلَّا بِالْحَقِّ وَالْإِسْلَامِ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمِ

DL4(08-09): *Developpements limités*

HX5-MPSI, CPGE My Youssef, Rabat



27 octobre 2008

Blague du jour :

Méthode pour éteindre un feu.

- Une personne normale va chercher un seau d'eau et la jette sur le feu.
- Un physicien regarde le feu en faisant des calculs précis pour estimer la quantité d'eau à utiliser.
- Un mathématicien regarde le feu et dit : Je sais que la solution existe.

Mathématicien du jour :

Al Khwarizmi

Abu Abudllah Muhammad bin Musa al-Khwarizmi (783-850) est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome perse. est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome perse. Le terme al-jabr (titre de l'un de ses livres) fut repris par les Européens et devint plus tard le mot algèbre. Il est le premier à parler du système des chiffres indien et à introduire le chiffre zéro. Dans son livre Al jabr wal moqabala, il donna une méthode (algorithme) pour résoudre des équations du 1^{er} ordre par des soustraction et identification, il nomma l'inconnu *chay* (la chose), les européens appelèrent après l'inconnue *xay* puis *x*. On comprend bien pourquoi le nom algorithme est issu de son nom.



Exercice 1 On définit la suite de fonctions f_n par

$$f_0(x) = \sqrt{1+x}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \sqrt{2 - f_{n-1}(x)}$$

On définit également la fonction g par

$$g(x) = \sqrt{2-x}$$

ainsi $f_n(x) = \sqrt{2 - f_{n-1}(x)}$.

1. Donner le domaine de définition de f_0 , g et f_1 .
2. Montrer que $g([0, 2]) \subset [0, 2]$
3. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}_{f_{n+1}} \subset \mathcal{D}_{f_n}$ où \mathcal{D}_{f_n} est l'ensemble de définition de f_n .
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-1, 3[$ $f_n(x)$ existe et $f_n(x) \in [0, 2]$ puis le domaine de définition commun à tous les f_n .
5. On se propose de déterminer un $DL_2(0)$ de f_n . Dans cette question, on prouve l'existence de DL.

- (a) Montrer que pour tout n dans \mathbb{N} , $\forall x \in [-1, 3[$ $f_n(x) \neq 2$
- (b) Montrer que, pour tout n dans \mathbb{N} , f_n est de classe C^∞ sur $] -1, 3[$.
- (c) Justifier que f_n admet un $DL_2(0)$.

6. On désire calculer explicitement le développement limité de f_n . On vient de prouver son existence. Il existe donc trois suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = a_n + b_n x + c_n x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Dans cette question, on détermine les valeurs de a_n et b_n ainsi qu'une relation de récurrence sur $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (a) Déterminer la valeur de a_n .
 - (b) Déterminer b_n et c_n pour $n = 0, 1$ et 2 (Utiliser votre calculatrice)
 - (c) Déterminer le $DL_2(0)$ de f_{n+1} en fonction de celui de f_n .
En déduire des relations de récurrence sur les suites $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (on précisera le premier terme)
 - (d) Déterminer la valeur de b_n .
7. Dans cette question, on détermine la valeur de c_n . L'examen des premières valeurs de $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (un bon conseil, examiner ces valeurs) suggère de poser

$$d_n = (-1)^{n+1} 2^{2n+3} c_n$$

- (a) Préciser la relation de récurrence vérifiée par la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ainsi que le premier terme.
- (b) Calculer d_0, d_1, \dots, d_5 . En déduire que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **semble** vérifier une relation de récurrence du type

$$d_{n+2} = \alpha d_{n+1} + \beta d_n \quad ((R))$$

où α et β sont des constantes que l'on précisera.

- (c) Déterminer les suites géométriques de premier terme égal à 1 et de raison $r \neq 0$, solution de la récurrence (R)
- (d) Chercher $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme combinaison linéaire des solutions précédentes, puis montrer que la suite trouvée est bien solution.

Fin