بسم اللّه الرّحمن الرّحيم
و قل إعملوا فسيرى اللّه عملكم و رسوله و المؤ منون

صدق اللّه العظيم

DL4(08-09): *Developpements limités*

HX5-MPSI, CPGE My Youssef, Rabat

27 octobre 2008

Blague du jour :
Méthode pour éteindre un feu.
• Une personne normale va chercher un seau d'eau et la jette sur le feu.
• Un physicien regarde le feu en faisant des calculs précis pour estimer la quantité d'eau à utiliser.
• Un mathématicien regarde le feu et dit : Je sais que la solution existe.

Mathématicien du jour : **Al Khwarizmi**
Abu Abudllah Muhammad bin Musa al-Khwarizmi (783-850) est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome perse. est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome perse. Le terme al-jabr (titre de l'un de ses livres) fut repris par les Européens et devint plus tard le mot algèbre. Il est le premier à parler du système des chiffres indien et à introduire le chiffre zèro. Dans son livre Al jabr wal moqabala, il donna une mèthode (algorithme) pour résoudre des équations du 1èr ordre par des soustraction et identification, il nomma l'inconnu *chay* (la chose), les européens appelèrent après l'inconnue *xay* puis x. On comprend bien pourquoi le nom algorithme est issu de son nom.

Exercice 1 *On définit la suite de fonctions f_n par*

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sqrt{1+x} \\ \forall n &\in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = \sqrt{2-f_{n-1}(x)} \end{aligned}$$

On définit également la fonction g par

$$g(x) = \sqrt{2-x}$$

ainsi $f_n(x) = \sqrt{2-f_{n-1}(x)}$.

1. *Donner le domaine de définition de* f_0, g *et* f_1.

2. *Montrer que* $g([0,2]) \subset [0,2]$

3. *Justifier que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}_{f_{n+1}} \subset \mathcal{D}_{f_n}$ *où* $\mathcal{D}_{f_n}$ *est l'ensemble de définition de* f_n.

4. *En déduire que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-1,3]$ $f_n(x)$ *existe et* $f_n(x) \in [0,2]$
   puis le domaine de définition commun à tous les f_n.

5. *On se propose de déterminer un* $DL_2(0)$ *de* f_n. *Dans cette question, on prouve l'existence de* DL.

   (a) *Montrer que pour tout* n *dans* $\mathbb{N}$, $\forall x \in [-1,3[$ $f_n(x) \neq 2$

   (b) *Montrer que, pour tout* n *dans* $\mathbb{N}$, f_n *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1,3[$.

   (c) *Justifier que* f_n *admet un* $DL_2(0)$.

6. *On désire calculer explicitement le développement limité de* f_n. *On vient de prouver son existence. Il existe donc trois suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = a_n + b_n x + c_n x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

   Dans cette question, on détermine les valeurs de a_n *et* b_n *ainsi qu'une relation de récurrence sur* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) *Déterminer la valeur de* a_n.

   (b) *Déterminer* b_n *et* c_n *pour* $n = 0, 1$ *et* 2 *(Utiliser votre calculatrice)*

   (c) *Déterminer le* $DL_2(0)$ *de* f_{n+1} *en fonction de celui de* f_n.
   En déduire des relations de récurrence sur les suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(on précisera le premier terme)*

   (d) *Déterminer la valeur de* b_n.

7. *Dans cette question, on détermine la valeur de* c_n. *L'examen des premières valeurs de* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(un bon conseil, examiner ces valeurs) suggère de poser*

$$d_n = (-1)^{n+1}\, 2^{2n+3} c_n$$

   (a) *Préciser la relation de récurrence vérifier par la suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *ainsi que le premier terme.*

   (b) *Calculer* $d_0, d_1, \cdots, d_5$. *En déduire que la suite* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***semble*** *vérifier une relation de récurrence du type*

$$d_{n+2} = \alpha d_{n+1} + \beta d_n \qquad ((R))$$

   où α *et* β *sont des constantes que l'on précisera.*

   (c) *Déterminer les suites géométriques de premier terme égal à 1 et de raison* $r \neq 0$, *solution de la récurrence* (R)

   (d) *Chercher* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *comme combinaison linéaire des solutions précédentes, puis montrer que la suite trouvée est bien solution.*

$\boxed{\text{Fin}}$