بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

DS 2 (08-09): *Complexes et Dev. Limités* *Équations différentielles*

Sup-MPSI, CPGE G.S. High Tech, Rabat

Lundi 24 Novembre 2008
Durée : 3heures

Citations du jour :
- **On sourit aux soustractions des mathématiciens. On frémit en songeant à celles que pourrait faire un chirurgien (Sacha Guitry).**
- **Les mathématiciens sont comme les français : quoique vous leur dites ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent Goethe**

Mathématiciens du jour : Riccati
Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) était un physicien et mathématicien italien, père de Vincenzo Riccati et de Giordano Riccati. Ses travaux en hydraulique (canaux de Venise) et en acoustique le conduisent à résoudre des équations différentielles du second ordre en les réduisant au 1er ordre et plus généralement à rechercher des méthodes de séparation des variables afin d'obtenir les solutions par simples quadratures. Ses travaux furent publiés après sa mort par ses fils à partir de 1764 sous le titre Opere del conte Jacopo Riccati. Il est en particulier connu pour l'équation de Riccati.

Nombre total de points : 42, le DS sera noté sur 40
Présentation et rédaction : 4points

Exercice 1 .

1) **(4 points) Résoudre** $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t \sin t + te^{2t}$.
2) **(3 points) Déterminer** $\lim\limits_{0} \dfrac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1 + x^3} - 1}$.

Exercice 2 .

source : DS MPSI, France (Pr Bechata)

Calculer les sommes suivantes, lorsqu'elles existent (!) :

1) **(2 points)** $A_n = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$.
2) **(1 point)** $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} A_k$.
3) **(3 points)** $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\cos kx}{(\cos x)^k}$

Exercice 3 . **source : DS MPSI, France (Pr Bechata)**

On considère un entier naturel non nul p ainsi que l'équation sur $\mathbb{C}$ donnée par

$$(E_p) : pz^p = z^{p-1} + \cdots + z + 1.$$

1) **(1+2 pts) Résoudre les équations** $(E_2) : 2z^2 = z + 1$ **et** $(E_3) : 3z^3 = z^2 + z + 1$.
2) **(1pt) Une solution de** (E_p) **peut-elle être de module strictement supérieur à** 1 **?**
3) **Soit** $e^{i\theta}$ **une solution de** (E_p) **de module** 1 **autre que** 1.
   a) **(2pts) Justifier que** $e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}} = \dfrac{\sin \frac{p\theta}{2}}{p \sin \frac{\theta}{2}}$.
   b) **(1pt) En déduire une contradiction.**

Problème **Concours Petites mines, 1998.**

Dans toute la suite, le plan est rapporté au repère orthonormé canonique $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. **On considère l'équation différentielle :**

$$(E) \ : (1 + x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x}$$

1) **(1pt) Préciser les intervalles d'études.**
2) **(2pts) Résoudre** (E) **sur** $\mathbb{R}_+^*$.
3) **Pour tout réel** λ, **on définit la fonction** f_λ **sur** $\mathbb{R}_+^*$ **par :**

$$\forall x > 0 \quad f_\lambda(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1 + x^2}$$

   et on note $(\mathcal{C}_\lambda)$ **sa courbe représentative.**
   a) **(2pts) Soit** $M(\alpha, \beta)$ **un point du plan avec** $\alpha > 0$. **Montrer que par** M **passe une et une seule courbe** $\mathcal{C}_\lambda$.
   b) **(1pt) Montrer que pour tout réel** λ, **la fonction** f_λ **est de classe** $\mathcal{C}^\infty$ **sur** $\mathbb{R}_+^*$.
   c) **(2pts) Montrer que pour tout** $x > 0$, $f'_\lambda(x)$ **est du signe de :**

$$g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2(\ln x + \lambda)$$

   d) **(2pts) Étudier les variations de** g_λ. **On montrera en particulier que l'équation** $g_\lambda(x) = 0$ **admet une et une seule solution sur** $\mathbb{R}_+^*$ **; cette solution sera notée** m_λ.
   e) **(1+1+1 pt) Dresser le tableau de variations de** f_λ. **On calculera les limites de** f_λ **en** 0 **et en** $+\infty$, **et on montrera que** $f_\lambda(m_\lambda) = 1/\left(2m_\lambda^2\right)$.
   f) **(1pt) Représenter sur un même graphique les courbes** $(\mathcal{C}_{-1}), (\mathcal{C}_0)$ **et** $(\mathcal{C}_1)$.
4) **Dans cette question, on cherche un équivalent de** m_λ **lorsque** λ **tend vers** $+\infty$.
   a) **(2pts) Montrer que pour** λ **assez grand, on a :**

$$\frac{1}{\lambda} \le m_\lambda \le \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

   b) **(2pts) En déduire, à l'aide des questions précédentes, que :**

$$\lim_{+\infty} \sqrt{2\lambda} m_\lambda = 1$$

****

Fin
Bonne chance