DS 6 : 2004–2005. Espaces vectoriels Développements limités

Durée : 3 heures

Problème : Espaces vectoriels
(12 points)

PRELIMINAIRES.
$\mathbb{R}[X]$ désigne l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients réels.
Pour tout entier naturel k, $\mathbb{R}_k[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k.
m désigne un entier naturel strictement supérieur à 2. n est un entier naturel non nul et strictement inférieur à $\frac{m}{2}$.
On note J l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à m.
Soit A un élément de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$, et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel A ne s'annule pas.
Soit f l'application de $R_m[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ définie par : $f(P) = AP' - PA'$, où P' et A' sont respectivement les polynômes derivés de P et A.
QUESTIONS

1. (a) (0.75 pts) Déterminer en fonction de m et n la valeur maximale p du degré du polynôme $f(P)$.
   (b) (0.5 pts) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.
   (c) (0.25 pts) Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que QA soit élément de $\mathbb{R}_m[X]$. Déterminer $f(QA)$.
   (d) (0.75 pts) En utilisant une formule de dérivation sur I, déterminer le noyau de f, (noté $\mathrm{Ker}\, f$). En déduire le rang de f.
2. Pour tout i élément de J, on pose : $Y_i = f(X^i)$.
   (a) (1.5 pts) Montrer que la famille de polynômes $(Y_i)_{i\in J\setminus\{n\}}$ est une base de l'image de f (notée $\mathrm{Im}\, f$).
   (b) (0.5 pts) En calculant $f(A)$, déterminer les coordonnées de Y_n dans cette base.
3. (a) (0.75 pts) Pour tout i élément de J, étudier le degré du polynôme Y_i (noté $d^\circ Y_i$).
   (b) (0.75 pts) Déterminer la valeur minimale du degré d'un polynôme S non nul de $\mathrm{Im}\, f$.

(c) (1.5 pts) En utilisant la question $1)c)$, montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$ divisible par A^2 appartient à $\operatorname{Im} f$.
En déduire qu'un polynôme S de $\mathbb{R}_p[X]$ appartient à $\operatorname{Im} f$ si et seulement si le reste R de sa division euclidienne par A^2 appartient à $\operatorname{Im} f$.
Pour tout polynôme S de $\operatorname{Im} f$, determiner alors la valeur maximale du degré de R.

4. (a) (0.5 pts) Soit P élément de $\mathbb{R}_m[X]$, déterminer l'ensemble des primitives sur I de : $\frac{S}{A^2}$ avec $S = f(P)$, que l'on notera $\displaystyle\int \frac{S(x)}{A^2(x)}\mathrm{dx}$.
   (b) (0.5 pts) En déduire $\displaystyle\int \frac{Y_i(x)}{A^2(x)}\mathrm{dx}$ pourtout i élément de J.
5. Dans cette question, m est un entier naturel strictement supérieur à 6. On donne A défini par $A = X^3 - X + 1$.
   (a) (0.75 pts) Calculer Y_0, Y_1 et Y_2.
   (b) (1 pt) Montrer que le polynôme $S = X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 2X - 1$ est élément de $\operatorname{Im} f$.
   (c) (0.5 pts) Déterminer $\displaystyle\int \frac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{(x^3 - x + 1)^2}\mathrm{dx}$ (on pourra utiliser la question 4).
   (d) (1.5 pts) Donner une condition necessaire et suffisante que doivent vérifier les réels a, b, c, d et e pourque le polynôme $aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ soit élément de $\operatorname{Im} f$.

Exercices de calcul de developpements limités

(8 points)

Chaque exercice est notée sur 2 points, et il sera tenu compte compte de l'exactitude des calculs mais aussi de la méthode utilisée.

1. Donner la limite de la suite réelle : $x_n = n^2(\tan \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n+1})$.
2. Donner le $DL_3(0)$ de l'application f ainsi que celui de son application réciproque de f^{-1}, avec $f(x) = \sqrt[3]{x^2 \sin x}$
3. Trouver une relation entre a, b, c et d pour avoir $x - \frac{a+b\cos x}{c+d\sin x} \sim x^2$ au voisinage de 0
4. Etudier les branches infinis, équation et position, de la fonction $g(x) = \frac{1+2x+2x^3}{1+3x+3x^2}$

FIN DU SUJET.
ET BONNE CHANCE.