DS 6 : 2004–2005. Espaces vectoriels Développements limités

Corrigé

Problème : Espaces vectoriels

1. (a) $f(P) = AP' - PA'$, donc $d^\circ f(P) \leq \max(d^\circ AP', d^\circ PA') = d^\circ P + d^\circ A - 1 = n + m - 1$, donc la valeur maximale p du degré du polynôme $f(P)$ est $n + m - 1$.

   (b) $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_m[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a : $f(P + \lambda Q) = A(P + \lambda Q)' - (P + \lambda Q)A' = AP' - PA' + \lambda(AQ' - QA') = f(P) + \lambda f(Q)$, en plus $\forall P \in \mathbb{R}_m[X]$ on a : $d^\circ f(P) \leq p$, d'où $f(P) \in \mathbb{R}_p[X]$, d'où f est une application linéaire de $\mathbb{R}_m[X]$.

   (c) $f(QA) = A(QA)' - A'QA = AQ'A + AQA' - A'QA = A^2Q'$.

(d) $P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow A'P - PA' = 0 = \frac{A'P - PA'}{A^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{P}{A}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{P}{A} = \lambda \Leftrightarrow P = \lambda A$, d'où $\operatorname{Ker} f = \{\lambda A \text{ tel que : } \lambda \in \mathbb{R}\}$, de dimension 1, d'aprés la formule du rang : rg(f) = $\dim \mathbb{R}_m[X] - \dim \operatorname{Ker}$ f=m+1–1=m.

2. Pour tout i élément de J, on pose : $Y_i = f(X^i)$.

   (a) On a $A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + aX + a_0$ et $f(A) = 0$, d'où par linéarité on peut conclure que : $Y^n = f(X^n) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i f(X^i) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i Y_i$, ainsi Y_n est combinaison linéaire des autres Y_i, or $(X^i)_{i\in J}$ est génnératrice de $\mathbb{R}_m[X]$, donc so image $(f(X^i) = Y_i)_{i\in J}$ est génératrice de $\operatorname{Im} u$, ainsi tout élément de $\operatorname{Im} u$ s'écrit combinaison linéaire des $(Y_i)_{i\in J}$, or Y_n est combinaison linéaire des autres Y_i, donc tout élément de $\operatorname{Im} u$ s'écrit combinaison linéaire des $(Y_i)_{i\in J\setminus\{n\}}$, donc dévient famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.

   D'autre part soit $(\lambda_i)_{i\in J\setminus\{n\}}$ tel que : $\sum_{i\neq n} \lambda_i Y_i = 0$, comme $Y_i = f(X^i)$, par linéarité on a : $f(\sum_{i\neq n} \lambda_i X^i) = 0$, donc $\sum_{i\neq n} \lambda_i X^i \in \operatorname{Ker} f$, d'où $\sum_{i\neq n} \lambda_i X^i = \lambda A = \lambda X^n + \ldots + \lambda a_0$, or le coéfficient de X^n dans $\sum_{i\neq n} \lambda_i X^i$ est nul, d'où $\lambda = 0$ et donc $\sum_{i\neq n} \lambda_i X^i = 0$ et par suite tous les λ_i sont nuls donc la famille $(Y_i)_{i\in J\setminus\{n\}}$ est libre d'où base de $\operatorname{Im} f$.

   (b) On a $A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ et $f(A) = 0$, d'où par linéarité on peut conclure que : $Y^n = f(X^n) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f(X^i) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i Y_i$,

3. (a) $Y_i = f(X^i) = X^iA' - iX^{i-1}A = nX^{n+i-1} + \ldots + a_1X^i - X^{n+i-1} - \ldots - ia_0X^{i-1} = (n - i)X^{n+i-1} + ((n - i - 1)a_{n-1})X^{n-i-2} + \ldots$, donc si $i \neq n$ on a : $d^\circ Y_i = n + i - 1$ et $d^\circ Y_n \leq n + i - 2$.

   (b) Comme chaque élément de $\operatorname{Im} f$ s'écrit combinaison linéaire des Y_i avec $i \neq n$, alors son degré minimal sera celui des Y_i avec $i \neq n$, or $Y^i = f(X^i) = X^iA' - iX^{i-1}A = X^{i-1}(XA' - iA)$ si $i \geq 1$ est de degré $n + i - 1$ et $Y_0 = f(1) = -A'$ de degré $n - 1$, donc le degré minimal des Y_i est $n - 1$ et sera aussi celui minimal pour les éléments de $\operatorname{Im} f$.

(c) D'aprés la question $1)c)$, $f(QA) = A^2Q'$, donc si P est divisible par A^2, alors $\exists Q_1$ tel que : $P = Q_1A^2$ et dans ce cas $P = f(QA)$ tel que : $Q' = Q_1$, d'où P appartient à $\operatorname{Im} f$.
Si $S = QA^2 + R$ alors $S - R = QA^2 \in \operatorname{Im} f$ d'où $S \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow R \in \operatorname{Im} f$.
$d^\circ R < d^\circ A^2 = 2n$ et comme $R \in \operatorname{Im} f$ alors $d^\circ R \leq p = n + m - 1$ or $2n < m \leq n + m - 1$ d'où la valeur maximale du degré de R est $2n - 1$.

4. (a) $\displaystyle\int \frac{S(x)}{A^2(x)}\mathrm{dx} = \int \frac{A(x)P'(x) - A'(x)P(x)}{A^2(x)}\mathrm{dx} = \int \left(\frac{P(x)}{A(x)}\right)'\mathrm{dx} = \frac{P(x)}{A(x)} + \lambda.$

   (b) Comme $Y_i = f(X^i)$, on conclut donc que : $\displaystyle\int \frac{Y_(x)}{A^2(x)}\mathrm{dx} = \frac{x^i}{A(x)} + \lambda.$

5. (a) $Y_0 = f(1) = -A' = -3X^2 + 1, Y_1 = f(X) = A - XA' = -2X^3 + 1$ et $Y_2 = 2XA - X^2A' = -X^4 - X^2 + 2X.$

   (b) $S = X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 2X - 1 = X^4 + X^2 - 2X + 4X^3 - 2 - 3X^2 + 1 = -Y_2 - Y_1 + Y_0$, or (Y_0, Y_1, Y_2) est une base de $\operatorname{Im} f$, donc $S \in \operatorname{Im} f$.

   (c) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{(x^3 - x + 1)^2}\mathrm{dx} = \int \frac{-Y_2(x) - Y_1(x) + Y_0(x)}{(x^3 - x + 1)^2}\mathrm{dx} = \frac{-x^2 - x + 1}{x^3 - x + 1} + \lambda.$

   (d) Comme (Y_0, Y_1, Y_2) est une base de $\operatorname{Im} f$, alors $aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ soit élément de $\operatorname{Im} f$ si et seulement si il est combinaison linéaire de (Y_0, Y_1, Y_2), autrement dit s'écrit sous la forme $xY_0 + yY_1 + zY_2 = -zX^4 - 2yX^3 - (z + 3x)X^2 + 2zX + x + y$ si et seulement si le système suivant :

$$\begin{aligned} -z &= a \\ -2y &= b \\ -z - 3x &= c \\ 2z &= d \\ x + y &= e \end{aligned}$$

admet des solutions si et seulement si $2a + d = 0$ et $\frac{a-c}{3} - \frac{b}{2} = e.$

Corrigé en Maple

```
> series(n^3*(tan(1/n)-tan(1/(n+1))),n=infinity,5);
```

$$n - 1 + \frac{2}{n} + \mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$$

```
> series(x-(a+b*cos(x))/(c+d*sin(x)),x=0,2);
```

$$-\frac{a+b}{c} + (1 + \frac{(a+b)\,d}{c^2})\,x + \mathrm{O}(x^2)$$

```
> series(root[3](x^2*sin(x)),x=0,6);
```

$$x - \frac{1}{18}\,x^3 + \mathrm{O}(x^5)$$

```
> series((1+2*x+2*x^3)/(1+3*x+3*x^2),x=infinity,2);
```

$$\frac{2}{3}\,x - \frac{2}{3} + \frac{\frac{10}{9}}{x} + \mathrm{O}(\frac{1}{x^2})$$

FIN DU CORRIGÉ.
ET À LA PROCHAINE