

Devoir Libre 1 : *Dénombrement*

À rendre Vendredi le 26-Septembre-2003

Problème 1:

Nombre de surjections : Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ on note par $S_{n,p}$ le nombre de surjections de $[1, n]$ sur $[1, p]$.

1. Que peut-on dire de $S_{n,p}$ si $p > n$?
2. Déterminer $S_{n,1}, S_{n,n}$.
3. Combien peut-on trouver d'applications de $[1, n]$ dans $[1, 2]$ non-surjectives ? En déduire $S_{n,2}$.
4. Montrer que : $S_{n,3} = 3^n - 3 - 3S_{n,2}$. En déduire la valeur de $S_{n,3}$.

Indication : On pourra commencer d'abord par déterminer le nombre d'applications non-surjectives de $[1, n]$ sur $[1, 3]$

5. Soit $(k, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $0 \leq k < p$, montrer alors que : $\sum_{q=k}^p (-1)^q C_p^q C_q^k = 0$.
6. Montrer pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ que : $S_{n,p} = p^n - \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k S_{n,k}$.
7. En déduire pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ que : $S_{n,p} = \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} k^n C_p^k$.
8. En déduire les valeurs des sommes suivantes :
 - (a) $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k^n C_n^k$.
 - (b) $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k^{n+1} C_n^k$.

Problème 2:

Théorème des chapeaux : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note par D_n le nombre de bijections de $[1, n]$ dans lui même, sans point fixes, c-a-d $f(i) \neq i, \forall i \in [1, n]$. On les appelle les dérangements de $[1, n]$. Par convention $D_0 = 1$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : n! = \sum_{k=0}^n C_n^k D_k$.
2. Soit $(k, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $0 \leq k < p$, montrer alors que : $\sum_{q=k}^p (-1)^q C_p^q C_q^k = 0$.
3. En déduire que : $D_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k!$.
4. Démontrer que : $\frac{D_n}{n!} \longrightarrow \frac{1}{e}$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Interprétation : Si n personnes déposent tous leurs chapeaux en entrant dans une salle puis en sortant chacun en prend un au hasard la probabilité pour qu'aucun ne reprenne le chapeau qu'il a déposé à la rentrée tend vers $\frac{1}{e}$.

FIN

© : www.chez.com/myismail

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc