DL 1 : *Théorie des ensembles*

Vendredi 09 Octobre 2004

Problème 1:

Soit E un ensemble non vide, et $\mathcal{F}$ un partie de $\mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{F}$ est un filtre sur E s'il vérifie les 4 propriétés suivantes :

i) : $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

ii) : $\forall (X, Y) \in \mathcal{F}^2$ on a : $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

iii) : $\forall X \in \mathcal{F}, \forall Y \in \mathcal{P}(E) : X \subset Y \implies Y \in \mathcal{F}$.

iv) : $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

1. $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}\}$ est-il un filtre sur $\{1,2,3,4\}$?.
2. Montrer que $\mathcal{F} = \{X \subset \mathbb{R}$ tel que $\overline{X}$ est un ensemble fini est un filtre sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que : $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R}$ tel que : $\exists \varepsilon > 0$ vérifiant : $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset A\}$ est un filtre de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
4. Soit A une partie de E fixée, montrer que : $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(E)$ tel que : $A \subset X$ est un filtre sur $\mathbb{R}$
5. $\mathcal{P}(E)$ est- il un filtre sur E ?
6. $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est- il un filtre sur E ? A quelle condition sur E le sera-t-il ?
7. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un filtre sur R, alors $E \in \mathcal{F}$.

Problème 2:

Soit E un ensemble non vide et $f : E \longrightarrow E$ une application. Une partie X de E est dite stable par f si et seulement si $f(X) \subset X$. Pour toute partie $A \in \mathcal{P}(E)$ on pose :
$\triangle_A = \{X \in \mathcal{P}(E)$ tels que : $A \subset X$ et X stable par $f\}$.

1. Montrer que toute réunion ou intersection d'une famille quelconque (finie ou infinie) de parties de E toutes stables par f est aussi stable par f.
2. Montrer que $\triangle_A \neq \emptyset$. On note alors par A^* l'intersection de toutes les parties X qui verifient la propriété de $\triangle_A$. Dire pourquoi A^* est la plus petite partie qui appartient à $\triangle_A$.
3. Avec les notations précédentes montrer que :
   (a) $\forall A \in \mathcal{P}(E) : A^*$ est stable par f .
   (b) $\forall A \in \mathcal{P}(E) : A$ est stable par $f \iff A^* = A$. En déduire que $A^{**} = A^*$.
   (c) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ on a : $A \subset B \Longrightarrow A^* \subset B^*$.
   (d) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ on a : $A^* \cup B^* \subset (A \cup B)^*$.
   (e) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ on a : $(A \cap B)^* \subset A^* \cap B^*$.

FIN

©2000-2004 http ://www.chez.com/myismail

Mamouni My Ismail
CPGE Med V-Casablanca