

DL 1 : *Théorie des ensembles*

Vendredi 09 Octobre 2004

Problème 1:

Soit E un ensemble non vide, et \mathcal{F} un partie de $\mathcal{P}(E)$. On dit que \mathcal{F} est un filtre sur E s'il vérifie les 4 propriétés suivantes :

- i) : $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
- ii) : $\forall (X, Y) \in \mathcal{F}^2$ on a : $X \cap Y \in \mathcal{F}$.
- iii) : $\forall X \in \mathcal{F}, \forall Y \in \mathcal{P}(E) : X \subset Y \implies Y \in \mathcal{F}$.
- iv) : $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

1. $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$ est-il un filtre sur $\{1, 2, 3, 4\}$?
2. Montrer que $\mathcal{F} = \{X \subset \mathbb{R} \text{ tel que } \overline{X} \text{ est un ensemble fini}\}$ est un filtre sur \mathbb{R} .
3. Montrer que : $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} \text{ tel que : } \exists \varepsilon > 0 \text{ vérifiant : }] - \varepsilon, \varepsilon[\subset A\}$ est un filtre de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
4. Soit A une partie de E fixée, montrer que : $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(E) \text{ tel que : } A \subset X\}$ est un filtre sur \mathbb{R}
5. $\mathcal{P}(E)$ est- il un filtre sur E ?
6. $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est- il un filtre sur E ? A quelle condition sur E le sera-t-il ?
7. Montrer que si \mathcal{F} est un filtre sur R , alors $E \in \mathcal{F}$.

Problème 2:

Soit E un ensemble non vide et $f : E \longrightarrow E$ une application. Une partie X de E est dite stable par f si et seulement si $f(X) \subset X$. Pour toute partie $A \in \mathcal{P}(E)$ on pose :

$\Delta_A = \{X \in \mathcal{P}(E) \text{ tels que : } A \subset X \text{ et } X \text{ stable par } f\}$.

1. Montrer que toute réunion ou intersection d'une famille quelconque (finie ou infinie) de parties de E toutes stables par f est aussi stable par f .
2. Montrer que $\Delta_A \neq \emptyset$. On note alors par A^* l'intersection de toutes les parties X qui vérifient la propriété de Δ_A . Dire pourquoi A^* est la plus petite partie qui appartient à Δ_A .
3. Avec les notations précédentes montrer que :
 - (a) $\forall A \in \mathcal{P}(E) : A^*$ est stable par f .
 - (b) $\forall A \in \mathcal{P}(E) : A$ est stable par $f \iff A^* = A$. En déduire que $A^{**} = A^*$.
 - (c) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ on a : $A \subset B \implies A^* \subset B^*$.
 - (d) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ on a : $A^* \cup B^* \subset (A \cup B)^*$.
 - (e) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ on a : $(A \cap B)^* \subset A^* \cap B^*$.

FIN

©2000-2004 <http://www.chez.com/myismail>

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca