MPSI 1 **2002-2003**
CPGE Agadir

DS N°1

Samedi le:12-Octobre-2002
Programme : Denombrement & Nombres Réels
Durée : 3h

Probléme :

Préambule:

- **On se propose de chercher la forme générale des sous groupes de** $(IR,+)$.
- **Rappel : Un sous groupe de** $(IR,+)$ **est une partie** H **de** IR **verifiant :** $0 \in H$ **et** $\forall(x,y) \in H^2$ **on a** $x-y \in H$.
- **Dans tout le probléme** H **désigne un sous-groupe de** $(IR,+)$ **non réduit a** $\{0\}$**et** $a = inf(H \cap IR^{+*})$.

1. **(0,5 pts) Montrer que** $(H \cap IR^{+*} \neq \emptyset \Leftrightarrow H \cap IR^{-*} \neq \emptyset)$.
2. **(0.5 pt) en deduire que** a **existe**.
3. **On suppose dans cette question que :** $a \neq 0,$ **et on veut montrer que** $H = aZ$.
   a. **On supose que** $a \notin H$
      i. **(0,75 pts) Soit** $\varepsilon > 0$ **, montrer que :** $\exists(x,y) \in H^2$ **tel que :** $x \neq y$ **et verifiant :** $\left(a < x < a+\varepsilon \text{ et } a < y < a+\varepsilon\right)$.
      ii. **(1 pt) En choisissant** ε **convenable tirer une contradiction**.
   b. **(0,5 pt) En deduire que** $aZ \subset H$.
   c. **(1 pt) Enoncez et redémontrer le théorème de la division euclidienne sur** IR.
   d. **(1,5 pts) Soit** $x \in H$ **, utiliser la question précèdente pour montrer que** $\exists q \in Z$ **tel que :** $x = aq$ **, conclure que :** $H = aZ$.
4. **On suppose dans cette question que** $a = 0$ **et on veut démontrer que** H **est** *dense* **dans** IR.
   a. **(0,5 pts) Rappeler la definition d'une partie** *dense* **dans** IR.
   b. **(0,75 pts) Soit** $(x,y) \in IR^2$ **tels que** $x < y$ **, montrer que :** $\exists b \in H$ **tel que :** $0 < b < y-x$.
   c. **(1 pt) En deduire que** $x < E\left(\frac{y}{b}\right)b < y$. **Conclure**.
5. **Applications :**
   a. **(1,5 pts) Montrer que :** $Z\left(\sqrt{2}\right) = \left\{a+b\sqrt{2} \text{ tel que : } (a,b) \in Z^2\right\}$ **est** *dense* **dans** IR.
   b. **(1,5 pts) Montrer que les suites** $(\cos(n))_{n\in IN}$ **et** $(\sin(n))_{n\in IN}$ **sont** *denses* **dans** $[-1,1]$.
   c. **(1 pt) Donner la forme générale des sous-groupes de** $(IR^*,\times)$.

Exercice :

Soit $n \in IN^*$, **de combien de façon on peut faire asseoir** n **hommes et** n **femmes autour d'une table ronde à** $2n$ **sièges en respectant l'alternance homme-femme dans les cas suivants**.

1. **Femmes , hommes et siege numerotés**.
2. **Femmes et hommes numerotés et sieges non numerotés**.
3. **Femmes numerotés et sieges et hommes non numerotés**.
4. **Femmes et sieges numerotés et hommes non numerotés**.
5. **Femmes et sieges et hommes non numerotés**.

NB :

Pour chaque cas donner la nombre de possibilités avec une justification et demonstration a l'aide du pricnipe des bergers.

Chaque question est notée sur 1 point.