DS 1 : *Théorie des ensembles - Dénombrement*

Lundi 29 Septembre 2003

Durée : 2 heures

Exercice 1:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.

1. Par récurrence, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$ *(1.5 point)* .
2. Par récurrence, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$ *(1.5 point)*.
3. En déduire la limite de S_n puis celle de u_n quand $n \longrightarrow +\infty$ *(1 point)*.

Exercice 2:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier les expressions suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \quad ; \quad P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad ; \quad Q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}}\right) .$$

(2 points) pour chaque somme simplifiée .

Exercice 3:

Définition :

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f :]a,b[$ on dit que f est continue en un point $x_0 \in]a,b[\Longleftrightarrow$ $(\forall \varepsilon > 0), (\exists \eta > 0)$ tel que : $(\forall x \in]a,b[), (|x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon)$.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f :]a,b[$ on dit que f est continue sur $]a,b[\Longleftrightarrow f$ est continue en tout point $x_0 \in]a,b[$.

*Question :*Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f :]a,b[$. Ecrire la négation de : f est continue sur $]a,b[$ avec des quantificateurs *(2 points)*.

Exercice 4:

1. Dans un ensemble E a n éléments combien peut-on former de parties qui contiennent une partie fixe A ,elle formée par p éléments ? *(2 points)* .
2. Sur un ensemble E à n éléments combien peut-on définir de relations binaires ? *(2 points)* .
   Penser a la définition des relations binaires à l'aide des graphes .
3. Parmi ces relations binaires combien sont-elles reflexives ? *(2 points)*.
   Penser a la définition des relations binaires reflexives à l'aide des graphes et à utiliser la question (1) .
4. Combien peut-on trouver de couples *(A,B)* de parties de E telles que $A \subset B \subset E$? *(2 points)*

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc