DS 1 : *Théorie des ensembles - Dénombrement*

Lundi 29 Septembre 2003

Corrigé

Exercice 1:

1. • Initialisation : l'inégalité est vraie pour $n = 1$ car $S_1 = 1$.

   • Hérédité : si $S_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$ pour un entier naturel n non nul donné, alors

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} ,$$

   mais $\sqrt{n-1} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n^2-1}+1}{\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$ (car $\sqrt{n^2-1} \leq \sqrt{n^2} = n$).

   Donc $S_{n+1} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, ce qu'il fallait démontrer.

2. • Initialisation : l'inégalité est vraie pour $n = 1$ car $S_1 = 1 \geq 2\sqrt{2} - 2$.

   • Hérédité : si, pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on a $S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$, alors

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2 = \frac{2n+3}{\sqrt{n+1}} - 2$$

   et, pour aboutir à l'inégalité voulue au rang $n+1$, il reste à vérifier que $\dfrac{2n+3}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n+2}$: montrons-le en raisonnant par équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{2n+3}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n+2} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2n+3 \geq 2\,\sqrt{(n+1)(n+2)} \\ &\Longleftrightarrow \quad (2n+3)^2 \geq 4(n+1)(n+2) \\ &\Longleftrightarrow \quad 4n^2+12n+9 \geq 4n^2+12n+8 , \end{aligned}$$

   ce qui est vrai.

3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2\sqrt{n+1} - 2\right) = +\infty$ et $S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$. Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et la suite (S_n) est divergente.

   On dit que la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ *est une série divergente.*

   d. Des questions **1.** et **2.**, on déduit l'encadrement

$$\frac{2\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}} \leq u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} .$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 2$. Le théorème d'encadrement (“des gendarmes”) permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Exercice 2:

- $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{p=2}^{n+1} \frac{p-1}{p!}$ $\quad$ (*translation d'indice : poser* $p = k+1$). Donc

$$S_n = \sum_{p=2}^{n+1} \left(\frac{p}{p!} - \frac{1}{p!} \right) = \sum_{p=2}^{n+1} \left(\frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{p!} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \qquad (\textit{somme "téléscopiqueô"}) .$$

- $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$, donc (*en effectuant des translations d'indices*) :

$$P_n = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n-1} k \right) \left(\prod_{k=3}^{n+1} k \right)}{\left(\prod_{k=2}^{n} k \right)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{k=2}^{n} k} \times \frac{\prod_{k=3}^{n+1} k}{\prod_{k=2}^{n} k} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n} .$$

- $Q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}} \right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{C_n^k + C_n^{k+1}}{C_n^{k+1}} \right)$. En utilisant la relation de Pascal,

$$Q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{C_{n+1}^{k+1}}{C_n^{k+1}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(n+1)!\,(n-k-1)!\,(k+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!\,n!} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n+1}{n-k} = \frac{(n+1)^n}{n!} .$$

Exercice 3:

$\exists x_0 \in]a,b[$ et $\exists \varepsilon > 0$ tel que : $\forall \eta > 0$ on ait : $\exists x \in]a,b[$ vérifiant : $|x - x_0| \leqslant \eta$ et $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Exercice 4:

Vu en TD

FIN

© : www.chez.com/myismail

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc