DS 1 : *Ensembles et dénombrement*

Mardi 12 Octobre 2004

Durée : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appr'ciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une régle graduée est autorisée.

Probléme 1:

Partie I :

Soit E un ensemble non vide, et $\mathcal{F}$ un partie de $\mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{F}$ est un filtre sur E s'il vérifie les 4 propriétés suivantes :
i) : $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
ii) : $\forall (X,Y) \in \mathcal{F}^2$ on a : $X \cap Y \neq \emptyset$ et $X \cap Y \in \mathcal{F}$.
iii) : $\forall X \in \mathcal{F}, \forall Y \in \mathcal{P}(E) : X \subset Y \implies Y \in \mathcal{F}$.
iv) : $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

1. (0.5 pts) $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}\}$ est-il un filtre sur $\{1,2,3,4\}$?.
2. (1 pt) Montrer que $\mathcal{F} = \{X \subset \mathbb{R}$ tel que $\overline{X}$ est un ensemble fini $\}$ est un filtre sur $\mathbb{R}$.
3. (1 pt) Montrer que : $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R}$ tel que : $\exists \varepsilon > 0$ vérifiant : $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset A\}$ est un filtre de $\mathbb{R}$.
4. (1 pt) Soit A une partie non vide de E fixée, montrer que : $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(E)$ tel que : $A \subset X\}$ est un filtre sur E
5. (0.5 pts) $\mathcal{P}(E)$ est- il un filtre sur E ?
6. (0.75 pts) $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est- il un filtre sur E ? A quelle condition sur E le sera-t-il ?
7. (0.5 pts) Montrer que si $\mathcal{F}$ est un filtre sur E, alors $E \in \mathcal{F}$.

Partie II :

Définition : Un filtre $\mathcal{F}$ sur E est dit pricipal s'il existe une partie $A \in \mathcal{F}$ tel que: $A \subset X \quad \forall X \in \mathcal{F}$.

1. (0.5 pts) Soit $\mathcal{F}$ un filtre principal, montrer qu'il existe une unique partie vérifiant la définition ci-dessus. On dit alors que $\mathcal{F}$ est engendré par A.
2. Soit $\mathcal{F}$ un filtre qui contient au moins une partie finie.
   (a) (0.75 pts) Soit $A \in \mathcal{F}$ finie de cardinal minimal parmi les autres parties de $\mathcal{F}$. Dire pourquoi une telle partie existe.
   (b) (1.25 pts) Montrer que $\mathcal{F}$ est principal engendré par cette partie A.
3. On suppose E est fini.
   (a) (0.5 pts) En déduire de ce qui précède que tout filtre sur E est principal.

   (b) (1.5 pts) En déduire le nombre total de filtre qu'on peut trouver sur un ensemble fini de cardinal égal à n.

   (c) (0.75 pts) Donner tous les filtres qu'on peut trouver sur $E = \{1, 2, 3\}$.

4. (1.5 pts) On suppose E infini, montrer que $\mathcal{F} = \{X \subset E$ tel que: $\overline{X}$ est un ensemble fini $\}$ n'est pas principal.

Probléme 2:

Définition : Soit E un ensemble non vide, on appelle partition de E toute famille $(A_i)_{1 \le i \le m}$ de parties de E vérifiant les 3 propriétés suivantes :
i) $\forall i \in [|1, m|], A_i \neq \emptyset$. ii) $\forall (i, j) \in [|1, m|]^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$. iii) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = E$.
Noter bien que cette partition est formée par m parties qui sont $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ fixés tels que $p \le n$, pour tout $m \in [|1, n|]$ on note par $\mathcal{P}_m^n$ l'ensemble des partitions de $[|1, n|]$ formées par m parties. *Exemple* : si $n = 3$ alors $\mathcal{P}_2 = \{(\{1, 2\}, \{3\}), (\{1, 3\}, \{2\}), (\{3, 2\}, \{1\})\}$.

1. (0.75 pts) Donner $\mathcal{P}_3^4$.
   Dans toute la suite on pose $P(n, m) = card(\mathcal{P}_m^n)$ (*Nombre de Stirling de 2eme espèce*), $\mathcal{S}_m$ l'ensemble des surjection de $[|1, n|]$ sur $[|1, m|]$ et $S(n, m) = card(\mathcal{S}_m)$.

2. (1 pt) Montrer que l'application $\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{S}_m & \longrightarrow & \mathcal{P}_m^n \\ & f & \longmapsto & (f^{-1}\{y\})_{y \in [|1, m|]} \end{array}$ est bien définie.

3. (0.75 pts) Si $n = 4$, donner tous les antécédants de π par φ où $\pi = (\{1\}, \{2, 3\}, \{4\})$.

4. (2.5 pts) Soit une partition $\pi = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$ de $[|1, n|]$ fixe, (on changera plus l'ordre des parties A_i). On définit l'application suivante : $\begin{array}{cccc} \psi : & \varphi^{-1}(\{\pi\}) & \longrightarrow & \mathcal{B}ij([|1, m|], [|1, m|]) \\ & f & \longmapsto & \psi(f) = g \end{array}$
   où $\begin{array}{cccc} g : & [|1, m|] & \longrightarrow & [|1, m|] \\ & i & \longmapsto & j \text{ tel que: } f^{-1}\{i\} = A_j \end{array}$. Montrer que ψ est bien définie, et bijective.
   En déduire que : $S(n, m) = m! P(n, m)$. Dans toute la suite pour tout $m \le p$ on pose :
   $\mathcal{F}_m = \{f : [|1, n|] \to [|1, p|] \text{ tel que : } card(f([|1, n|]) = m\}$
   et $\begin{array}{cccc} \phi : & \mathcal{F}_m & \longrightarrow & \mathcal{S}_m \\ & f & \longmapsto & g \end{array}$ où $\begin{array}{cccc} g : & [|1, n|] & \longrightarrow & [|1, m|] \\ & i & \longmapsto & \text{le rang de } f(i) \text{ dans } f([|1, n|]) \end{array}$.

5. (0.5 pts) *Exemple* : donner $\phi(f)$ où $f : [|1, 4|] \to [|1, 3|]$ définie par : $f(1) = f(2) = f(4) = 3, f(3) = 1$.

6. (1.75 pts) Montrer que dans le cas général : $\forall g \in \mathcal{S}_m$ on a : $card(\phi^{-1}\{g\}) = \mathcal{C}_p^m$. On pourra montrer que la fonction : $\begin{array}{cccc} \theta : & \phi^{-1}(\{g\}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_m([|1, p|]) \\ & f & \longmapsto & f([|1, n|]) \end{array}$ est bijective.
   où $\mathcal{P}_m([|1, p|]) = \{A \subset [|1, p|] \text{ tel que: } card(A) = m\}$.

7. (0.5 pts) En déduire que : $card(\mathcal{F}_m) = \mathcal{C}_p^m m! P(n, m)$.

8. (1 pt) Montrer que : $(\mathcal{F}_m)_{1 \le m \le p}$ est une partition de $\mathcal{F}([|1, n|], [|1, p|])$.

9. (0.5 pts) En déduire que : $p^n = \displaystyle\sum_{m=1}^{p} \mathcal{C}_p^m m! P(n, m)$.

FIN

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca