DS 1 : *Ensembles et dénombrement*

Mardi 12 Octobre 2004

CORRIGÉ

Probléme 1:

Partie I :

1. $\mathcal{F}$ n'est pas un filtre car ne vérifie pas iii). $X = \{1\} \in \mathcal{F}, X \subset Y = \{1, 2\}$, mais $Y \notin \mathcal{F}$.
2. i) $\overline{\mathbb{R}} = \emptyset$ est un ensemble fini, donc $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$, d'où $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
   ii) $(X, Y) \in \mathcal{F}^2 \implies \overline{X}, \overline{Y}$ finis, d'où $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ fini d'où $X \cap Y \in \mathcal{F}$.
   iii) $X \in \mathcal{F}, X \subset Y \implies \overline{X}$ fini et $\overline{Y} \subset \overline{X} \implies \overline{Y}$ fini $\implies Y \in \mathcal{F}$.
   iv) $\overline{\emptyset} = \mathbb{R}$ infini donc $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
3. i) $]-1, 1[\in \mathcal{F}$, prendre $\epsilon = 1$, d'où $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
   ii) $(X, Y) \in \mathcal{F}^2 \implies \exists \epsilon_1 > 0$ tel que: $]-\epsilon_1, \epsilon_1[\subset X$ et $\exists \epsilon_2 > 0$ tel que: $]-\epsilon_2, \epsilon_2[\subset Y$, on a alors $]-\epsilon, \epsilon[\subset X \cap Y$ où $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$.
   iii) $X \in \mathcal{F}, X \subset Y \implies \exists \epsilon > 0$ tel que: $]-\epsilon, \epsilon[\subset X$ et $X \subset Y \implies]-\epsilon, \epsilon[\subset Y \implies Y \in \mathcal{F}$.
   iv) $\emptyset$ ne peut pas être dans $\mathcal{F}$ car toutes las parties éléménts de $\mathcal{F}$ sont non vides puisque contiennent toutes zéro.
4. i) $A \in \mathcal{F}$, d'où $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
   ii) $(X, Y) \in \mathcal{F}^2 \implies A \subset X$ et $A \subset Y \implies A \subset X \cap Y$
   iii) $X \in \mathcal{F}, X \subset Y \implies \exists \epsilon > 0$ tel que: $]-\epsilon, \epsilon[\subset X$ et $X \subset Y \implies]-\epsilon, \epsilon[\subset Y \implies Y \in \mathcal{F}$.
   iv) $\emptyset$ ne peut pas être dans $\mathcal{F}$ car toutes las parties éléménts de $\mathcal{F}$ sont non vides puisque conteinnent toutes zéro.
5. Non, car $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$.
6. Si E contient au moins deux éléments x, y alors $\{x\} \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}, \{y\} \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ mais $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est un filtre sur E à condition que $\mathrm{card}(E) = 1$.
7. $\mathcal{F}$ est un filtre sur E, en particulier $\mathcal{F} \neq \emptyset$, soit $A \in \mathcal{F}$, on a : $A \in \mathcal{P}(E)$, donc $A \subset E$, alors $E \in \mathcal{F}$.

Partie II :

1. Supposons qu'il y'en a deux parties A et B vérifiant la définition, alors $A \subset B$ et $B \subset A$, d'où $A = B$.
2. (a) L'ensemble $\{\mathrm{card}(X)$ tel que: $X \in \mathcal{F}$ et X finie $\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide (car $\mathcal{F}$ est un filtre qui contient au moins une partie finie) donc admet un plus petit élément, qui sera le cardinal d'une partie $A \in \mathcal{F}$ de cardinal minimum parmi les parties $X \in \mathcal{F}$, d'où le résultat.

(b) Pour montrer que $\mathcal{F}$ est principal engendré par cette partie A il faut montrer que : $\forall X \in \mathcal{F}$ on a : $A \subset X$. En effet $(X, A) \in \mathcal{F}^2 \implies X \cap A \in \mathcal{F}$, or A est la partie de cardinal minimal dans $\mathcal{F}$, donc $\text{card}(A) \leq \text{card}(X \cap A)$, d'autre part $\text{card}(A) \geq \text{card}(X \cap A)$ car $X \cap A \subset A$ d'où $\text{card}(A) = \text{card}(X \cap A)$ et comme $X \cap A \subset A$ alors $X \cap A = A$, d'où $A \subset X$.

3. (a) D'aprés ce qui précède tout filtre qui contient une partie finie est principal. Comme E est fini et que tout filtre contient E alors ce filtre est principal.

   (b) Le nombre total de filtre qu'on peut trouver sur un ensemble fini de cardinal égal à n est égal au nombre de parties non vide de E, c'est à dire $2^n - 1$ car tout filtre est principal, l'application $A \mapsto \mathcal{F}_A$ est une bijection entre les parties non vide de E et les filtres.

   (c) Ce sont les $\mathcal{F}_A$ où $A \subset \{1, 2, 3\}$ avec $A \neq \emptyset$.

4. Supposons $\mathcal{F} = \{X \subset \mathbb{R}$ tel que: $\overline{X}$ est un ensemble fini $\}$ est principal engendré par A. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{[|1, n|]} \in \mathcal{F}$ car $\overline{\overline{[|1, n|]}} = [|1, n|]$ est fini, donc $A \subset \overline{[|1, n|]}$, doù $[|1, n|] \subset \overline{A}$, d'où $n \leq \text{card}(\overline{A})$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on fait tendre n vers $+\infty$, on obtient $\text{card}(\overline{A}) = +\infty$, impossible puisque $A \in \mathcal{F}$.

Probléme 2:

1. Si $n = 4, \mathcal{P}_3 = \{(\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}), (\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}, (\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}),$
$(\{3, 2\}, \{1\}, \{4\}), (\{4, 2\}, \{1\}, \{4\}), (\{3, 4\}, \{2\}, \{1\})\}$.

2. $\forall (f, g) \in \mathcal{S}_m^2$ on a : $f = g \implies (f^{-1}\{y\})_{y \in [|1,m|]} = (g^{-1}\{y\})_{y \in [|1,m|]} \implies \varphi(f) = \varphi(g)$ et $\forall f \in \mathcal{S}_m$ on a : $(f^{-1}\{y\})_{y \in [|1,m|]}$ est une partition de $[|1, n|]$, résultat du cours d'aprés le principe des bergers en plus elle est formée par m parties donc $\varphi(f) \in \mathcal{P}_m$ d'où φ est bien définie.

3. π admet 6 par antécédants par φ ce sont les applications :

$$f_1 : \begin{array}{rl} \{1,2,3,4\} & \to \{1,2,3\} \\ 1 & \mapsto 1 \\ 2 & \mapsto 2 \\ 3 & \mapsto 2 \\ 4 & \mapsto 3 \end{array} \; ; f_2 : \begin{array}{rl} \{1,2,3,4\} & \to \{1,2,3\} \\ 1 & \mapsto 1 \\ 2 & \mapsto 3 \\ 3 & \mapsto 3 \\ 4 & \mapsto 2 \end{array} \; ; f_3 : \begin{array}{rl} \{1,2,3,4\} & \to \{1,2,3\} \\ 1 & \mapsto 2 \\ 2 & \mapsto 1 \\ 3 & \mapsto 1 \\ 4 & \mapsto 3 \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{rl} \{1,2,3,4\} & \to \{1,2,3\} \\ 1 & \mapsto 2 \\ 2 & \mapsto 3 \\ 3 & \mapsto 3 \\ 4 & \mapsto 1 \end{array} \; ; f_5 : \begin{array}{rl} \{1,2,3,4\} & \to \{1,2,3\} \\ 1 & \mapsto 3 \\ 2 & \mapsto 2 \\ 3 & \mapsto 2 \\ 4 & \mapsto 1 \end{array} \; ; f_6 : \begin{array}{rl} \{1,2,3,4\} & \to \{1,2,3\} \\ 1 & \mapsto 3 \\ 2 & \mapsto 1 \\ 3 & \mapsto 1 \\ 4 & \mapsto 2 \end{array}$$

4. On doit alors montrer que : ψ est bien définie injective et surjective.
ψ est bien définie, en effet : si $f = h \implies \forall i \in [|1, m|] : \quad f^{-1}\{i\} = h^{-1}\{i\} \implies \forall i \in [|1, m|] :$ $\psi(f)(i) = \psi(h)(i) \implies \psi(f)(i) = \psi(h)(i)$ et si $f \in^{-1} \{\pi\}$ on a : $g : [|1, m|] \to [|1, m|]$ est injective car : $g(i) = g(k) \implies f^{-1}\{i\} = f^{-1}\{i\} \implies A_i = A_k \implies i = k$ car A_i partition, d'autre part : $g : [|1, m|] \to [|1, m|]$ et $card([|1, m|]) = card([|1, m|]) = m$ d'où g est bijective.
ψ est injective, en effet : $\forall (f, f') \in \varphi^{-1}(\{\pi\})^2, \psi(f)(i) = \psi(f')(i) \implies f^{-1}\{i\} = f'^{-1}\{i\} \forall \in$ $[|1, m|]$. $\forall \in [|1, m|]$, on a : $k \in f^{-1}\{f(k)\} = f'^{-1}\{f(k)\} \implies f'(k) \in \{f(k)\} \implies f(k) =$

$f'(k)$, d'où $f=f'$.

ψ est surjective, en effet : $\forall g\in \mathcal{B}ij([|1,m|],[|1,m|])$ on cherche : $f\in \mathcal{B}ij([|1,m|],[|1,m|])$ tel que: $\psi(f)=g$, on sait que : $\forall i\in[|1,n|],\exists! j\in[|1,m|]$ tel que: $i\in A_j$, car $(A_j)_{1\leq j\leq n}$ est une partition de $[|1,n|]$, il suffit de prendre : $\begin{array}{rccl} f: & [|1,n|] & \longrightarrow & [|1,m|] \\ & i & \longmapsto & j \text{ tel que: } i\in A_j \end{array}$.

ψ est bijective, d'où $card(\psi^{-1}\{p\})=card(\mathcal{B}\rangle|([|\infty,⇕|],[|\infty,⇕|]))=⇕!$. Ainsi chaque élément de l'ensemble d'arrivée de φ qui est $\mathcal{P}_m$ admet exactement $m!$ antécédant dans son ensemble de départ $\mathcal{S}_m$, d'aprés le principe des bergers $S(n,m)=\text{card}(\mathcal{S}_m)=m!\text{card}(\mathcal{P}_m)=m!P(n,m)$.

5. *Exemple* : $f([|1,4|])=\{1,3\}$, $f(1)=f(2)=f(4)=3=2me, f(3)=1=1r$ d'où $m=2, \phi(f)(1)=\phi(f)(2)=\phi(f)(3)=2, \phi(f)(4)=1$.

6. θ est injective, en effet : $\forall (f,h)\in\phi^{-1}(\{g\})^2:\theta(f)=\theta(h)\implies f([|1,n|])=h([|1,n|])$, d'autre part $(f,h)\in\phi^{-1}(\{g\})^2$ d'où $\phi(f)=\phi(h)$ rang de $f(i)=g(i)$=rang de $h(i)$ d'où $f(i)=h(i)$. θ est surjective : Si $A=\{i_1<i_2..<i_m\}\in\mathcal{P}_m([|1,p|])$ on pose : $f(k)=i_{g(k)}\forall k\in[|1,n|]$ il suffit de vérifier que : $\theta(f)=A$; en effet : $f\in\phi^{-1}(\{g\})$ car $g(k)$ =l'ordre de $f(k)$ dans $f([|1,n|])$ et $f([|1,p|])=A$. ainsi θ est bijective d'où card $(\phi^{-1}(\{g\}))$ =card$\mathcal{P}_m([|1,p|])=\mathcal{P}_p^m$.

7. Application directe du principe des bergers dans la question précédente.

8. $\forall (m,m')\in[|1,p|]^2$ tel que: $m\neq m'; f\in\mathcal{F}_m\cap\mathcal{F}_{m'}\implies$ card $(f([|1,n|]))=m=m'$, impossible d'où $\mathcal{F}_m\cap\mathcal{F}_{m'}=\emptyset$. D'autre part $\forall f\in\mathcal{F}([|1,n|],[|1,p|])$ on a : $f\in\mathcal{F}_m$ avec m =card $(f([|1,n|]))$ d'où $\mathcal{F}([|1,n|],[|1,p|])\subset\bigcup_{m=1}^{p}\mathcal{F}_m$ comme $\forall m\in[|1,p|]:\mathcal{F}_m\subset\mathcal{F}([|1,n|],[|1,p|])$ alors $\mathcal{F}([|1,n|],[|1,p|])\supset\bigcup_{m=1}^{p}\mathcal{F}_m$. D'où $(\mathcal{F}_m)_{1\leq m\leq p}$ est une partition de $\mathcal{F}([|1,n|],[|1,p|])$.

9. n^p =card$(\mathcal{F}([|1,n|],[|1,p|]))$ =card $\bigcup_{m=1}^{p}\mathcal{F}_m=\sum_{m=1}^{p}\text{card}\mathcal{F}_m\sum_{m=1}^{p}\mathcal{C}_p^m m!P(n,m)$.

FIN

Mamouni My Ismail
CPGE Med V-Casablanca