

High Tech Prépas, Rabat



Contrôle: *Théorie des ensembles
Coniques*

Mercredi 10 Février 2010

Durée : 1 heure

Blague du jour :

Comment un ingénieur informaticien tente-t-il de réparer sa voiture lorsqu'elle a un problème? Il sort de la voiture, ferme toutes les fenêtres, retourne dans la voiture, et essaie de redémarrer.

Mathématicien du jour

Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) est un mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley. Il fut immobile les trois dernières années de sa vie et meurt à la suite d'une pneumonie.

Karl Weierstrass est souvent cité comme le « père de l'analyse moderne ». Ses travaux les plus connus portent sur les fonctions elliptiques. C'est lui qui le premier rendit public un exemple de fonction continue nulle part dérivable.

Weierstrass Karl



Exercice 1 *Partie stable par une application.*

Soit $f : E \rightarrow E$ et A une partie de E , on dit que A est stable par f si et seulement si $f(A) \subset A$.

- 1) Montrer que \emptyset et E sont deux parties stables de E .
- 2) Soit $x \in E$, à quelle condition le singleton $\{x\}$ est stable par f .
- 3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$, et $f^0 = id_E$. Pour tout $A \subset E$, on pose :

$$A_n = f^n(A), \text{ et } B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

- a) Montrer que $A \subset B$.
- b) Montrer que $f(B) \subset B$.
- c) Soit C une autre partie de E , vérifiant : $\begin{cases} A \subset C \\ f(C) \subset C \end{cases}$.
 - i. Montrer par récurrence que $A_n \subset C, \forall n \in \mathbb{N}$.
 - ii. En déduire que $B \subset C$.
- d) En déduire que B est la plus petite partie de E , au sens de l'inclusion, stable par f et contenant A .

Exercice 2 Donner l'équation réduite de la conique d'équation :

$$x^2 - xy + 2y^2 + 3x - 6y + 1 = 0$$

Préciser sa nature, excentricité, foyer(s) et directrice(s). Dessiner enfin la conique dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

*Fin
Bonne chance*