.

Contrôle : *Logie*
Théorie des ensembles

Samedi 29 Septembre 2007.

CORRIGÉ

Exercice 1
Grand père et grande mère : Chloe et Marie.
Leurs fils et fille : Sandrine, Florian et Joel.
Leurs petits fils : Jean et Sebastian (fils de Florian)
Exercice 2

1) $A \cap B = A \cup B \Longrightarrow A \subset A \cup B = A \cap B \subset A \Longrightarrow A \cap B = A \Longrightarrow A \subset B$
De façon pareille $B \subset A$, d'où l'égalité.

2) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap \overline{A \setminus B} = A \cap \overline{A \cap \overline{B}} = A \cap \left(\overline{A} \cup B\right) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$.

Exercice 3

1) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que f est injective, or $\forall x \in E$, on a $f(f(x)) = f(x)$, donc $f(x) = x$ d'où $f = id_E$ et par suite surjective.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que f est surjective, et montrons qu'elle est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$, or f est surjective, donc $\exists (x_1', x_2') \in E^2$ tel que $x_1 = f(x_1'), x_2 = f(x_2')$, d'autre part $f \circ f = f$, donc $x_1 = f(x_1') = f \circ f(x_1') = f(x_1) = f(x_2) = f \circ f(x_2') = f(x_2') = x_2$.

2) $x \in f^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) \Longleftrightarrow f(x) \in f^{-1}(A) \Longleftrightarrow f \circ f(x) \in A \Longleftrightarrow f(x) \in A \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A)$

.

Fin.