On appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le sous-ensemble de $\mathcal{A}$ formé des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{B}$. On définit la relation de conjugaison de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}$ par

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow (\exists h \in \mathcal{B}) \;\; g = hofoh^{-1}$$

On note alors $f \sim g$ pour $f\mathcal{R}g$, et on dit que f et g sont conjuguées. Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de la conjugaison.

1. **Propriétés générales :**

   a) montrer que la relation de conjugaison est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$.

   b) Déterminer la classe de f, c'est-à-dire l'ensemble des éléments g de $\mathcal{A}$ pour lesquels $f \sim g$ dans le cas où :

      i. f est l'application $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array} \right.$ que l'on notera $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ par la suite

      ii. f est l'application $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array} \right.$

   c) Soit f un élément donné de $\mathcal{A}$.

      i. Dans le cas général peut-on affirmer :

      $$f = hofoh^{-1} \Leftrightarrow h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$

      ii. Soit $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des éléments h de $\mathcal{B}$ tels que $f = hofoh^{-1}$.
      Montrer que pour tout $h \in \mathcal{C}_f$, $h^{-1} \in \mathcal{C}_f$, et que pour tout $(h_1, h_2) \in \mathcal{C}_f \times \mathcal{C}_f$, $h_2oh_1 \in \mathcal{C}_f$.

      iii. Quelle propriété peut-on alors énoncer (et démontrer) concernant $(\mathcal{C}_f, o)$?

   Pour toute la suite de I, f et g désignent deux éléments conjugués de $\mathcal{A}$.

   d) Prouver les équivalences :

      i. f est injective $\Leftrightarrow$ g est injective.

      ii. f est surjective $\Leftrightarrow$ g est surjective.

   e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f^n, la composée $n^{ième}$ de l'application f, c'est-à-dire $f^n = fofo \cdots of$.

      i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n \sim g^n$.

      ii. Montrer que si $f \in \mathcal{B}$, alors il en est de même de g, et que de plus $f^{-1} \sim g^{-1}$.

   f) On rappelle que $a \in \mathbb{R}$ est un point fixe pour a lorsque $f(a) = a$.

      i. Montrer que si f possède un point fixe, alors g en possède un également. Etablir une bijection entre l'ensemble des points fixes de f et l'ensemble des points fixes de g.

      ii. Les applications $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x - 1 \end{array} \right.$ sont-elles conjuguées ?

      iii. Même question lorsque $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x+1} - 1 \end{array} \right.$.

2. **Fonctions sinus et cosinus :**
   Dans cette partie, on cherche à savoir si les applications sinus et cosinus sont conjuguées ou non.
   Pour cela on suppose qu'il existe $h \in \mathcal{B}$ tel que $\sin = ho\cos oh^{-1}$.

a) Montrer que $h([-1,1]) = [-1,1]$.

b) Etudier l'injectivité de la restriction à $[-1,1]$ des applications cos et $h^{-1} o \sin o h$.

c) Conclure.

3. **Une conjuguée de** $2x\sqrt{1+x^2}$:

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^z - e^{-z} = u$, où u désigne un paramètre réel.

b) En déduire que l'application sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, dont on exprimera la bijection réciproque à l'aide des fonctions usuelles.

c) Montrer enfin que les applications $f : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x\sqrt{1+x^2} \end{array} \right.$ sont conjuguées.