.

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤمِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé du Contrôle : *Théorie des ensembles*

Sup 5, MPSI, CPGE My Youssef, Rabat

Lundi 22 Septembre 2008

Durée : 1 heure

Corrigé du problème.

1) a) Reflexivité : $\forall f \in \mathcal{A}$, on a $f\mathcal{R}f$ (prendre $h = id_{\mathbb{R}}$).

Symétrie :
$$\begin{aligned} f\mathcal{R}g &\Longleftrightarrow \exists h \in \mathcal{B} \text{ tel que } g = h \circ f \circ h^{-1} \\ &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathcal{B} \text{ tel que } f = k \circ g \circ k^{-1} \quad (\text{ prendre } k = h^{-1}) \\ &\Longleftrightarrow g\mathcal{R}f \end{aligned}$$

Transitivité :
$$\begin{aligned} f\mathcal{R}g, g\mathcal{R}w &\Longleftrightarrow \exists h, k \in \mathcal{B} \text{ tel que } g = h \circ f \circ h^{-1}, w = k \circ g \circ k^{-1} \\ &\Longrightarrow \exists r \in \mathcal{B} \text{ tel que } w = r \circ f \circ r^{-1} \quad (\text{ prendre } r = k \circ h) \\ &\Longleftrightarrow f\mathcal{R}w \end{aligned}$$

b) i. $f \in \overline{id_{\mathbb{R}}} \Longleftrightarrow \exists h \in \mathcal{B}$ tel que $f = h \circ id_{\mathbb{R}} \circ h^{-1} \Longrightarrow f = id_{\mathbb{R}}$, d'où $\overline{id_{\mathbb{R}}} = \{id_{\mathbb{R}}\}$.

ii. De façon pareille on montre que $\overline{\theta} = \{\theta\}$ où θ désigne l'application nulle.

c) i. Non bien sûR, tout ce qu'on peut affirmer c'est que $f = h \circ f \circ h^{-1} \Longleftrightarrow f \circ h = h \circ f$.

ii. $h \in \mathcal{C}_f \Longleftrightarrow h \in \mathcal{B}, f = h \circ f \circ h^{-1} \Longleftrightarrow h^{-1} \in \mathcal{B}, f = h^{-1} \circ f \circ h \Longleftrightarrow h^{-1} \in \mathcal{C}_f$.
$h_1, h_2 \in \mathcal{C}_f \Longleftrightarrow h_1, h_2 \in \mathcal{B}, f = h_1 \circ f \circ h_1^{-1}, f = h_2 \circ f \circ h_2^{-1} \Longrightarrow h_2 \circ h_1 \in \mathcal{B}, f = h_2 \circ h_1 \circ f \circ h_1^{-1} \circ h_2^{-1} = h_2 \circ h_1 \circ f \circ (h_2 \circ h_1)^{-1} \Longrightarrow h_2 \circ h_1 \in \mathcal{C}_f$.

d) i. Supposons que f est injective, comme f et g sont conjuguées alors $\exists h \in \mathcal{B}, g = h \circ f \circ h^{-1}$, donc g est injective en tant que composée d'applications injectives. La reciproque est pareille puisque f et g jouent des rôles symétriques.

ii. Pareil que la question précédente.

e) i. $f \sim g \iff \exists h \in \mathcal{B}, g = h \circ f \circ h^{-1} \Longrightarrow g^n = (h \circ f \circ h^{-1})^n = h \circ f \circ h^{-1} \circ h \circ f \circ h^{-1} \circ \cdots h \circ f \circ h^{-1} = h \circ f^n \circ h^{-1} \Longrightarrow f^n \sim g^n$.

ii. $f \sim g \iff \exists h \in \mathcal{B}, g = h \circ f \circ h^{-1} \Longrightarrow g^{-1} = (h \circ f \circ h^{-1})^{-1} = h \circ f^{-1} \circ h^{-1} \Longrightarrow f^{-1} \sim g^{-1}$.

f) i. $f \sim g, f(a) = a \iff \exists h \in \mathcal{B}, g = h \circ f \circ h^{-1} \Longrightarrow f(a) = a, g \circ h = h \circ f \Longrightarrow g(h(a)) = h(f(a)) = h(a) \Longrightarrow h(a)$ est un point fixe de a. Ainsi l'application h induit une bijection de l'ensemble des points fixes de f vers ceux de g (à rédiger, c'est simple).

ii. L'application f n'admet aucun point fixe, alors g en admet un $a = 0$, donc ne sont pas équivalentes.

iii. L'application f n'admet aucun point fixe, alors g en admet un $a = -1$, donc ne sont pas équivalentes.

2) a) $h([-1,1]) = h \circ \cos(\mathbb{R}) = h \circ \cos \circ h^{-1}(\mathbb{R}) = \sin(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

b) cos n'est pas injective sur $[-1,1]$ $(\cos(-1) = \cos(1))$, alors que sin est injective sur $[-1,1]$, puisque $[-1,1] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $h^{-1} \circ \sin \circ h$ est injective en tant que composée d'applications injectives .

c) On a montré que cos n'est pas injective, alors que $h^{-1} \circ \sin \circ h = \cos$ est injective, c'est absurde puisque $\cos = h^{-1} \circ \sin \circ h$.

3) a) $e^z - e^{-z} = u \iff e^{2z} - 1 = ue^z \iff X^2 - uX - 1 = 0$ où $X = e^z$ dont les solutions sont $X_1 = e^{z_1} = \dfrac{u - \sqrt{u^2+4}}{2} < 0, X_2 = e^{z_2} = \dfrac{u + \sqrt{u^2+4}}{2} > 0$. Donc $z_2 = \ln \dfrac{u + \sqrt{u^2+4}}{2}$ est l'unique solution réelle de l'équation $e^z - e^{-z} = u$, alors que $e^{z_1} = \dfrac{u - \sqrt{u^2+4}}{2} < 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ posons $z_1 = x_1 + iy_1$ et $r = -\dfrac{u - \sqrt{u^2+4}}{2} > 0$, l'équation devient $e^{x_1}e^{iy_1} = re^{i\pi}$, d'où $x_1 = r = -\dfrac{u - \sqrt{u^2+4}}{2}$ et $y_1 \equiv \pi\ [2\pi]$, i.e., $y_1 = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ donc une infinité de solutions complexes.

b) On a $\begin{array}{rccc} \sinh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$, d'aprés ce qui précède l'équation $\sinh x = u$ équivalente à $e^x - e^{-x} = 2u$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, qui est $x = \ln(u + \sqrt{u^2+2})$, ainsi l'application réciproque de sinh, est définie par la relation $\begin{array}{rccc} \sinh^{-1} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(2x + \sqrt{x^2+2}) \end{array}$.

c) $g \circ \sinh(x) = 2\sinh x\sqrt{1 + \sinh^2(x)} = 2\sinh x\sqrt{\cosh^2(x)}$ où $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} 0$, donc $g \circ \sinh(x) = 2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x)$, d'où $\sinh^{-1} \circ g \circ \sinh(x) = 2x = f(x)$, ainsi f et g sont conjugués.

$\boxed{\text{Fin.}}$