1. Exercice de logique

Logique propositionnelle tri-valuée

On désire étendre la logique propositionnelle bivaluée classique (notée par la suite L_2) de sorte à prendre en compte, en plus de V (vrai) et F (faux), une troisième valeur de vérité, notée I (pour indéterminé).

La **logique de Lukasiewicz**, notée L_3, est une telle logique tri-valuée dans laquelle le connecteur de négation ($\neg$), le connecteur de conjonction ($\wedge$), le connecteur de disjonction ($\vee$) et le connecteur d'implication ($\Rightarrow$) sont définis par les tables de vérités suivantes :

x	$\neg x$
V	F
F	V
I	I

$\neg x$

$x \backslash y$	V	F	I
V	V	F	I
F	F	F	F
I	I	F	I

$x \wedge y$

$x \backslash y$	V	F	I
V	V	V	V
F	V	F	I
I	V	I	I

$x \vee y$

$x \backslash y$	V	F	I
V	V	F	I
F	V	V	V
I	V	I	V

$x \Rightarrow y$

On dit que deux propositions sont **équivalentes** dans une logique donnée L si elles ont même table de vérité dans cette logique.

ρ 1 – Indiquer une proposition P_1 équivalente dans L_2 à la proposition « $x \vee y$ » et n'utilisant pas d'autres connecteurs que $\neg$ et $\wedge$. Les propositions P_1 et « $x \vee y$ » sont-elles équivalentes dans L_3 ?

ρ 2 – Indiquer une proposition P_2 équivalente dans L_2 à la proposition « $x \Rightarrow y$ » et n'utilisant pas d'autres connecteurs que $\neg$ et $\vee$. Les propositions P_2 et « $x \Rightarrow y$ » sont-elles équivalentes dans L_3 ?

ρ 3 – Établir (en détaillant son obtention) la table de vérité dans L_3 de la proposition P_3 suivante :

$$((x \Rightarrow y) \wedge ((\neg x) \Rightarrow y)) \Rightarrow y.$$

Cette proposition est-elle une tautologie dans L_3 (la définition d'une tautologie dans la logique L_3 reste la même que dans la logique L_2) ?

ρ 4 – On appelle **littéral** une variable propositionnelle ou sa négation. Dans L_2, toute proposition logique admet une forme normale disjonctive (c'est-à-dire une disjonction de conjonctions de littéraux) qui lui est équivalente. Établir une proposition P_4 sous forme normale disjonctive équivalente dans L_2 à la proposition « $(x \vee y) \Rightarrow z$ ». Les propositions P_4 et « $(x \vee y) \Rightarrow z$ » sont-elles équivalentes dans L_3 ?

ρ 5 – Peut-on faire un raisonnement par contraposition dans L_3 (on justifiera la réponse) ?

ρ 6 – On définit un ordre sur les valeurs F, I et V par : $F < I < V$. On considère une logique L tri-valuée pour laquelle simultanément :

- L est une extension de L_2 pour les quatre connecteurs usuels ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$) ; autrement dit, les restrictions aux valeurs V et F des tables de vérité de L donnent les tables de vérité de L_2 ;
- le connecteur $\wedge$ est commutatif ;
- la proposition « $x \vee y$ » est équivalente à P_1 ;
- la proposition « $x \Rightarrow y$ » est équivalente à P_2 ;
- pour toute valeur de y, la fonction $x \mapsto x \wedge y$ croît au sens large avec x ;
- les propositions « $\neg(\neg x)$ » et « x » sont équivalentes.

Combien y a-t-il de telles logiques (on justifiera la réponse) ?