DL 1 Bis : *Dénombrement*

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

A rendre Lundi 03 Octobre 2006.

EXERCICE 1 : Soit $x \in]0,1[$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(n,0) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.
Calculer $S(n,0)$; en déduire $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S(n,0)$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$S(n,1) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k$.

a. Calculer $(1-x)S(n,1)$; en déduire une expression de $S(n,1)$, puis $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S(n,1)$.

b. Retrouver les résultats du **a.** à l'aide d'une dérivation.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$, on pose $S(n,r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} x^k$.

a. On suppose $r \geq 1$. En utilisant la relation de Pascal, montrer que

$$(1-x)S(n,r) = S(n,r-1) - \binom{n+r}{r} x^{n+1} .$$

b. Déterminer $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \binom{n+r}{r} x^{n+1}$.

c. Montrer que $\forall r \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} S(n,r) = \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

EXERCICE 2 : Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. On note I_n^k le nombre de permutations de l'ensemble $[|1,n|]$ admettant exactement k points fixes (ou "points invariants"). On convient que $I_0^0 = 1$.

1. Calculer I_n^n, I_n^{n-1} (pour $n \geq 1$), I_n^{n-2} (pour $n \geq 2$).

2. Que vaut $\sum_{k=0}^{n} I_n^k$?

3. Montrer que $I_n^k = \binom{n}{k} I_{n-k}^0$.

4. Construire une table des I_n^k pour $0 \leq k \leq n \leq 6$.

5.a. Combien y a-t-il de permutations laissant fixe un élément de $[|1,n|]$ donné ?

b. En déduire la somme $\sum_{k=0}^{n} k\, I_n^k$.

c. Quel est le nombre moyen de points invariants d'une permutation de $[|1,n|]$?

6. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_k^0 = n!$.

7. On a ainsi $I_{n+1}^0 = (n+1)! - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} I_k^0$. En déduire, par une récurrence forte, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad I_n^0 = n\, I_{n-1}^0 + (-1)^n .$$

Dresser une table des I_n^0, pour n de 0 à 10.

8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n^0 = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

Fin.