Devoir Libre : *Dénombrement.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Pour Samedi 05 Octobre 2007.

Dénombrement d'applications particuliéres.

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولَهُ وَ المُؤ مِنِين
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Exercice 1. Applications strictement croissantes.
Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. Combien peut-on définir d'applications strictement croissantes de $[|1,n|]$ vers $[|1,n+p|]$?
Penser à caractériser de telles applications à l'aide de leurs ensembles images

Exercice 2. ***Injections et paradoxe des anniversaires :***

1) Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tels que $n\leq p$. Quelle est la proportion des applications injectives de $[|1,n|]$ dans $[|1,p|]$?
2) En déduire la probabilté pour que deux personnes parmi n aient le même anniversaire.
3) Faire le calcul pour n=*45*. Que pensez vous ?

Exercice 3. ***Dérangements et théorème des chapeaux :***
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on note par D_n le nombre de bijections de $[|1,n|]$ dans lui même,sans point fixes,c-à-d $f(i)\neq i,\forall i\in[|1,n|]$. On les appelle les dérangements de $[|1,n|]$. Par convention $D_0=1$.

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}: n!=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$.
2) Soit $(k,p)\in\mathbb{N}^2$ tels que : $0\leq k<p$, montrer alors que : $\displaystyle\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k}=0$.
3) En déduire que : $D_n=(-1)^n\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k!$.
4) (**) Démontrer que : $\frac{D_n}{n!}\longrightarrow\frac{1}{e}$ quand $n\longrightarrow+\infty$.
Intérprétation :Si n personnes déposent tous leurs chapeaux en entrant dans une salle puis en sortant chacun en prend un au hasard la probabilité pour qu'aucun ne reprend le chapeau qu'il a déposé a la rentrée tend vers $\frac{1}{e}$. Etonnant, non ?.

Exercice 4. ***Nombre de surjections :***

Pour $n, p \in \mathbb{N}$, $S_{n,p}$ désigne le nombre de surjections de $[|1,n|]$ dans $[|1,p|]$.

1) Que dire de $S_{n,p}$ si $p > n$?
2) Déterminer $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$.
3) Combien d'applications de $[|1,n|]$ dans $[|1,2|]$ sont non-surjectives ? En déduire $S_{n,2}$.
4) Montrer : $S_{n,3} = 3^n - 3 - 3S_{n,2}$, et en déduire la valeur de $S_{n,3}$.
   On pourra commencer par chercher le nombres d'applications non surjectives de $[|1,n|]$ *dans* $[|1,3|]$.
5) Montrer que : $\sum_{q=k}^{p}(-1)^q \binom{p}{q}\binom{q}{k} = 0$.
6) Montrer que : $S_{n,p} = p^n - \sum_{k=1}^{p-1}\binom{k}{p} S_{n,k}$.
7) En déduire que : $S_{n,p} = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}k^n\binom{p}{k}$.
8) En déduire les valeurs des sommes suivantes :
   $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k^n\binom{n}{k}$, $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k^{n+1}\binom{n}{k}$.
9) Pour p fixé, donner $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{S_{n,p}}{p^n}$, puis donner une intérpretation *probabilistique* au résultat trouvé.

Exercice 5. ***Combinaisons avec répétitions :***

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On note Γ_n^p le nombre de n-uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = p$.

1) Déterminer Γ_n^0, Γ_n^1, Γ_n^2, Γ_2^n.
2) Démontrer que $\Gamma_{n+1}^{p+1} = \Gamma_{n+1}^{p} + \Gamma_n^{p+1}$ (on classera les $(n+1)$-uplets tels que $x_1 + \cdots + x_{n+1} = p+1$ suivant que $x_1 = 0$ ou non).
3) En déduire que $\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.

Exercice 6. ***Parité de*** $\binom{n}{p}$ ***:***

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $n = 2^p$.

1) Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Vérifier que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
2) En déduire que : $\forall\, k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\binom{n}{k}$ est pair.
3) En déduire que : $\forall\, k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\binom{n-1}{k}$ est impair.

Fin.