بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلون

صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

# DL 1 : *Relations d'équivalence*

Jeudi 18 Septembre 2009

**Exercice 1.** : Relations d'équivalence
Soit $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur $E$. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $E$, lorsque $\mathcal{R}$ est une relation réflexive, symétrique et transitive.

1. Donner un exemple de relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$, et un exemple de relation d'équivalence sur l'ensemble des droites du plan.
2. On suppose $E \neq \emptyset$. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$, et $y \in E$. On appelle classe d'équivalence de $y$, l'ensemble
$cl(y) = \{x \in E \; ; \; x\mathcal{R}y\}$.
Montrer que l'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de $E$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}$. On définit une relation sur $\mathbb{Z}$ par $m\mathcal{R}n \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \; m - n = kp$. $\mathcal{R}$ s'appelle relation de congruence modulo $p$ dans $\mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Quelles sont les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ ? Combien y en a-t'il ?
4. Soit $p \in \mathbb{N}$, tel que $p \geqslant 2$. Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = 1\}$ et $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{U}$ par $z_1\mathcal{R}z_2 \Leftrightarrow z_1^p = z_2^p$.
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{U}$.
   (b) Quelle est la classe de $z = e^{i\theta}$ ?
   (c) On définit $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{U} \to \mathbb{U} \\ z \to z^p \end{array} \right.$ ; $f$ est-elle injective ?
   On note $\mathbb{U}/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$, et on définit $\widehat{f} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{U}/\mathcal{R} \to \mathbb{U} \\ cl(z) \mapsto z^p \end{array} \right.$ . Pourquoi cette définition de $\widehat{f}$ a-t'elle un sens ? Montrer que $\widehat{f}$ est injective.

*Fin*