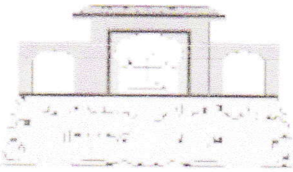
CPGE My Youssef, Rabat



بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

DL 13 (08-09): *Dénombrement*

22 février 2009

Blague du jour :
Si on demande à un physicien théoricien d'étudier la stabilité d'une chaise, il s'y prend comme suit :
- Il met 10 minutes pour résoudre le cas d'une chaise à un pied,
- ensuite 1 heure pour résoudre le cas d'une chaise à une infinité de pieds,
- et enfin 10 ans pour résoudre le cas d'une chaise à un nombre fini de pieds.

Mathématicien du jour — *Catalan*

Eugène Charles Catalan (1814-1894) est un mathématicien franco-belge, spécialiste de la théorie des nombres. Polytechnicien, de même promotion que Liouville (X1833), puis enseignant à l'école polytechnique, mais pas longtemps à cause de ses idées jugées trop à gauche à l'époque.
En 1844, il conjectura le résultat suivant : les seules puissances consécutifs successives dans $\mathbb{N}$ sont 8 et 9. Ce résultat fût démontré en 2002 par Preda Mihailescu. Des nombres et une constante portent son nom.

PROBLÉME. source : www.mathprepa.com

Nombres de Catalan

On rappelle que si $0 \leq p \leq n$, le symbole $\binom{n}{p}$ désigne le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments. Par convention on pose $\binom{n}{p} = 0$ si $p < 0$ ou $p > n$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $C_n = \dfrac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$ est appelé *nombre de Catalan* d'indice n.

I. Généralités sur les nombres de Catalan

1. (a) Montrer que pour entier naturel n, on a l'égalité $C_{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2} C_n$.

   (b) Donner les valeurs de C_n pour $0 \leq n \leq 7$.

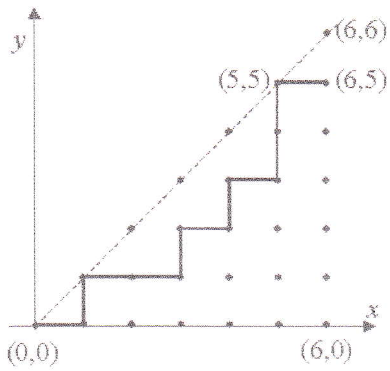
2. Prouver les relations suivantes :
   (a) $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n} = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n}{n+1} = \dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n+1}$.
   (b) $C_n = \dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n-1}{n} = \dfrac{2}{n-1}\dbinom{2n-1}{n+1} = \dbinom{2n-1}{n} - \dbinom{2n-1}{n+1}$.
   (c) Montrer que les C_n sont dans $\mathbb{N}$, que la suite (C_n) est strictement croissante à partir de $n = 1$, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = +\infty$.
3. Dans cette question, on trouve l'ordre de grandeur de C_n quand n tend vers $+\infty$.
   (a) Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a : $4\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^{3/2} \leq \dfrac{C_k}{C_{k-1}} \leq 4\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{3/2}$.
   (b) En déduire $\dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}} \leq C_n \leq 3\dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$.

II. Un premier problème de dénombrement

On va étudier un problème de dénombrement où interviennent les nombres de Catalan.

On considère des *chemins* joignant des points de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, et formés de *déplacements* successifs.
Les seuls déplacements autorisés à partir d'un point (n, m) sont :
- Le passage de (n, m) à $(n + 1, m)$ (vers la droite.)
- Le passage de (n, m) à $(n, m + 1)$ (vers le haut.)

On note $\Delta = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leq m \leq n\}$ l'ensemble des points de $\mathbb{N}^2$ qui sont "sous" ou "sur" la diagonale $y = x$.
Voici par exemple un chemin de Δ, qui va de $(0, 0)$ à $(6, 5)$.



Remarque : pour tous entiers naturels a et b, et moyennant une translation de vecteur (a, b), il est évident qu'il y a autant de chemins d'origine $(0, 0)$ et d'extrémité (n, m) qu'il y a de chemins d'origine (a, b) et d'extrémité $(a + n, b + m)$.

Pour tout (n, m) de Δ, on note $\delta_{n,m}$ le nombre de chemins d'origine $(0, 0)$, d'extrémité (n, m), et qui sont inclus dans Δ (donc qui ne "traversent" pas la diagonale.)
On note $\delta_n = \delta_{n,n}$ c'est-à-dire le nombre de chemins de Δ qui vont de $(0, 0)$ à (n, n).

1. (a) Indiquer rapidement la valeur des coefficients $\delta_{n,0}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (b) Justifier $\delta_n = \delta_{n,n-1}$ (si $n \geq 1$) et $\delta_{n,m} = \delta_{n-1,m} + \delta_{n,m-1}$ (si $1 \leq m < n$.)
   (c) En déduire la valeur des $\delta_{n,1}$ (pour $n \geq 1$) et des $\delta_{n,2}$ (pour $n \geq 2$.)
   (d) Former le tableau triangulaire des $\delta_{n,m}$ pour $0 \leq m \leq n \leq 7$.
   Que remarque-t-on pour les valeurs diagonales δ_n, avec $0 \leq n \leq 7$?
2. (a) Montrer que pour tout couple (n, m) de Δ, on a $\delta_{n,m} = \dfrac{n-m+1}{n+1}\dbinom{n+m}{n}$.
   Indication : Procéder par récurrence sur l'entier n ; pour chaque valeur de n on sera amené à vérifier l'égalité précédente pour $m = 1$, $m = 2$, etc., $m = n$.
   (b) En déduire que le nombre de Catalan C_n est égal au nombre δ_n de chemins de Δ qui ont le point $(0, 0)$ pour origine et le point (n, n) pour extrémité.

3. On se propose de retrouver le résultat de (II.2b) de façon purement combinatoire.
   (a) Soient m et n deux entiers naturels.
   Montrer que le nombre de chemins de $A(a,b)$ à $B(a+n,b+m)$ est $\binom{n+m}{m}$.
   (b) Un chemin $\mathcal{P}$ de $(0,0)$ à (n,n) est dit *excessif* s'il franchit $y=x$.
   Soit $\mathcal{E}_n$ le nombre de chemins excessifs de $(0,0)$ à (n,n). Prouver $\delta_n = \binom{2n}{n} - \mathcal{E}_n$
   (c) Soit $\mathcal{P}$ un chemin excessif de $(0,0)$ à (n,n).
   Soit $A(k,k+1)$ le premier point de $\mathcal{P}$ situé strictement au-dessus de la diagonale.
   Au chemin $\mathcal{P}$ on associe alors le chemin $\mathcal{P}'$ défini de la manière suivante :
   - On conserve les $2k+1$ premiers mouvements, qui amènent de $(0,0)$ à $A(k,k+1)$.
   - On inverse chacun des mouvements suivants de $\mathcal{P}$ (tout déplacement vers le haut est transformé en déplacement à droite, et vice-versa.)

   Montrer que le chemin $\mathcal{P}'$ mène du point $(0,0)$ au point $(n-1,n+1)$.
   (d) Montrer que la transformation $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}'$ evoquée ci-dessus réalise une bijection de l'ensemble des chemins excessifs qui vont de $(0,0)$ à (n,n) vers l'ensemble de tous les chemins qui vont de $(0,0)$ à $(n-1,n+1)$.
   (e) En déduire que C_n est bien le nombre des chemins de Δ qui vont de $(0,0)$ à (n,n).
4. On va maintenant établir une relation de récurrence vérifiée par les C_n.
   Soit $\mathcal{P}$ un chemin de Δ, d'origine $A(0,0)$ et d'extrémité $B(n,n)$, avec $n \geq 1$.
   On sait qu'il y a exactement C_n façons de former $\mathcal{P}$.
   (a) On suppose que $\mathcal{P}$ ne rencontre la diagonale $y=x$ qu'en A et B.
   Montrer que le nombre de façons différentes de former le chemin $\mathcal{P}$ est C_{n-1}.
   (b) On suppose que $\mathcal{P}$ rencontre $y=x$ en au moins un point autre que A et B.
   Soit k l'abscisse minimum (comprise entre 1 et $n-1$) de ces points d'intersection.
   Pour chaque valeur de k, montrer qu'il y a $C_{k-1}\,C_{n-k}$ façons de former $\mathcal{P}$.
   (c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

III. Interprétations combinatoires des nombres de Catalan

Les nombres de Catalan apparaissent dans de très nombreux problèmes d'énumération.
Dans cette partie, où n est fixé, on se propose d'aborder certains de ces problèmes.
Dans les questions suivantes, montrer que le nombre évoqué est toujours égal à C_n.
On notera $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ etc. les ensembles énumérés aux questions 1., 2., 3. etc.
On notera également $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des chemins de Δ qui vont de $(0,0)$ à (n,n).

1. Le nombre de suites $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ de $2n$ éléments de $\{-1,1\}$ telles que $\sum_{k=1}^{2n} x_k = 0$ et $\forall m \in \{1,\ldots,2n\}$, $\sum_{k=1}^{m} x_k \geq 0$. Donner les solutions si $n=3$.
2. Le nombre de suites croissantes $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_{n-1}$ de $\mathbb{N}$ avec $y_k \leq k$ pour tout k.
   Donner les solutions quand $n=4$.
3. Le nombre de suites strictement croissantes $z_1 < z_2 < \ldots < z_{n-1}$ de $\mathbb{N}$ avec $z_k < 2k$ pour tout k (indication : $z_k = y_k + k - 1$). Donner les solutions si $n=4$.
4. Le nombre de suites $d_1, d_2 \ldots, d_n$ de $\mathbb{N}$ telles que $d_{k+1} \leq d_k + 1$ pour tout k, et en supposant que d_1 est dans $\{0,1\}$ (indication : $d_k = k - y_k$). Donner les solutions quand $n=4$.

mamouni.myismail@gmail.com
www.chez.com/myismail

3. On se propose de retrouver le résultat de (II.2b) de façon purement combinatoire.

   (a) Soient m et n deux entiers naturels.
   Montrer que le nombre de chemins de $A(a,b)$ à $B(a+n, b+m)$ est $\binom{n+m}{m}$.

   (b) Un chemin $\mathcal{P}$ de $(0,0)$ à (n,n) est dit *excessif* s'il franchit $y = x$.
   Soit $\mathcal{E}_n$ le nombre de chemins excessifs de $(0,0)$ à (n,n). Prouver $\delta_n = \binom{2n}{n} - \mathcal{E}_n$

   (c) Soit $\mathcal{P}$ un chemin excessif de $(0,0)$ à (n,n).
   Soit $A(k, k+1)$ le premier point de $\mathcal{P}$ situé strictement au-dessus de la diagonale.
   Au chemin $\mathcal{P}$ on associe alors le chemin $\mathcal{P}'$ défini de la manière suivante :
   - On conserve les $2k+1$ premiers mouvements, qui amènent de $(0,0)$ à $A(k, k+1)$.
   - On inverse chacun des mouvements suivants de $\mathcal{P}$ (tout déplacement vers le haut est transformé en déplacement à droite, et vice-versa.)

   Montrer que le chemin $\mathcal{P}'$ mène du point $(0,0)$ au point $(n-1, n+1)$.

   (d) Montrer que la transformation $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}'$ evoquée ci-dessus réalise une bijection de l'ensemble des chemins excessifs qui vont de $(0,0)$ à (n,n) vers l'ensemble de tous les chemins qui vont de $(0,0)$ à $(n-1, n+1)$.

   (e) En déduire que C_n est bien le nombre des chemins de Δ qui vont de $(0,0)$ à (n,n).

4. On va maintenant établir une relation de récurrence vérifiée par les C_n.
   Soit $\mathcal{P}$ un chemin de Δ, d'origine $A(0,0)$ et d'extrémité $B(n,n)$, avec $n \geq 1$.
   On sait qu'il y a exactement C_n façons de former $\mathcal{P}$.

   (a) On suppose que $\mathcal{P}$ ne rencontre la diagonale $y = x$ qu'en A et B.
   Montrer que le nombre de façons différentes de former le chemin $\mathcal{P}$ est C_{n-1}.

   (b) On suppose que $\mathcal{P}$ rencontre $y = x$ en au moins un point autre que A et B.
   Soit k l'abscisse minimum (comprise entre 1 et $n-1$) de ces points d'intersection.
   Pour chaque valeur de k, montrer qu'il y a $C_{k-1}\,C_{n-k}$ façons de former $\mathcal{P}$.

   (c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $C_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

III. Interprétations combinatoires des nombres de Catalan

Les nombres de Catalan apparaissent dans de très nombreux problèmes d'énumération.
Dans cette partie, où n est fixé, on se propose d'aborder certains de ces problèmes.
Dans les questions suivantes, montrer que le nombre évoqué est toujours égal à C_n.
On notera $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ etc. les ensembles énumérés aux questions 1., 2., 3. etc.
On notera également $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des chemins de Δ qui vont de $(0,0)$ à (n,n).

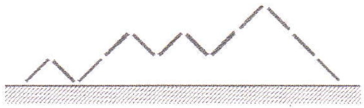
1. Le nombre de suites $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ de $2n$ éléments de $\{-1, 1\}$ telles que $\sum\limits_{k=1}^{2n} x_k = 0$ et $\forall m \in \{1, \ldots, 2n\}$, $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k \geq 0$. Donner les solutions si $n = 3$.
2. Le nombre de suites croissantes $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_{n-1}$ de $\mathbb{N}$ avec $y_k \leq k$ pour tout k.
   Donner les solutions quand $n = 4$.
3. Le nombre de suites strictement croissantes $z_1 < z_2 < \ldots < z_{n-1}$ de $\mathbb{N}$ avec $z_k < 2k$ pour tout k (indication : $z_k = y_k + k - 1$). Donner les solutions si $n = 4$.
4. Le nombre de suites $d_1, d_2 \ldots, d_n$ de $\mathbb{N}$ telles que $d_{k+1} \leq d_k + 1$ pour tout k, et en supposant que d_1 est dans $\{0, 1\}$ (indication : $d_k = k - y_k$). Donner les solutions quand $n = 4$.

5. Le nombre de façons d'écrire n paires de parenthèses pour que chaque parenthèse fermante corresponde à une parenthèse ouvrante. Par exemple, si $n=3$, il y a cinq possiblités : ((())), (()()), (())(), ()(()) et ()()().

6. Le nombre de "chaînes de montagnes" formées de n "montées" / et de n "descentes" \\.

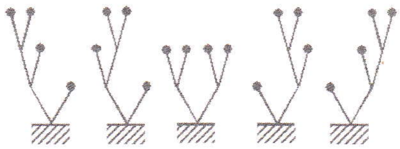
   La chaîne ne doit jamais descendre à une altitude inférieure à celle du point initial.

   On voit ici un exemple de chaîne avec $n=6$.



7. Dans cette question, on considère des "arbres binaires enracinés".
   - A la base de l'arbre se trouve un noeud "racine".
   - Chaque noeud, s'il n'est pas une feuille, possède un rameau gauche et un rameau droit.

   On voit ici les arbres binaires enracinés à 4 feuilles.



   On demande de prouver que le nombre d'arbres binaires enracinés à $n+1$ feuilles est C_n.

   Indication : raisonner par récurrence forte et utiliser la question (II.4c)

8. Soit E un ensemble muni d'un "produit" (celui de a par b est noté ab) non associatif.

   Une expression comme abc est donc dépourvue de sens tant qu'on ne choisit pas entre $(ab)c$ et $a(bc)$: on dira que les deux expressions précédentes sont les parenthésages de abc.

   Ainsi les parenthésages de $abcd$ sont : $((ab)c)d$, $(ab)(cd)$, $(a(bc))d$, $a((bc)d)$, et $a(b(cd))$.

   On demande de montrer que le nombre de parenthésages de $a_1a_2\cdots a_{n+1}$ est C_n.

9. Douze convives sont assis autour d'une table.

   De combien de manières ces douze personnes peuvent-elles échanger simultanément six poignées de mains sans que deux poignées différentes se croisent au-dessus de la table ?

   On voit ici l'une des $\cdots$ solutions au problème.

Un peu d'histoire :
La suite de Catalan fut décrite pour la première fois par Leonhard Euler, qui s'était intéressé au nombre de différentes façons de partager un polygone en triangles. La première publication sur ces nombres est due à Segner et la suite porte alors le nom de Nombre de Segner. Eugène Charles Catalan fit le lien avec le nombre d'expressions « parenthésées » et le nom de Catalan remplaça celui de Segner. L'astuce de comptage des mots de Dyck fut trouvée par Désiré André en 1887. Un mot de Dyck est un mot formé de n lettres X et de n lettres Y, tel qu'aucun abrègement du mot à la finale (obtenu en supprimant les dernières lettres à partir d'un rang quelconque) ne contienne plus de Y que de X.
C_n est également le nombre de partitions non croisées de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$.

Problème des votes :
Lors d'une élection, il y a 2 candidats A et B , $2n$ bulletins exprimés et exactement n votes pour A et n votes pour B. Dans combien de cas le dépouillement fera apparaître que A est toujours en tête ou à égalité devant B ?

Fin
à la prochaine