DL 1Bis : *Récurrence*

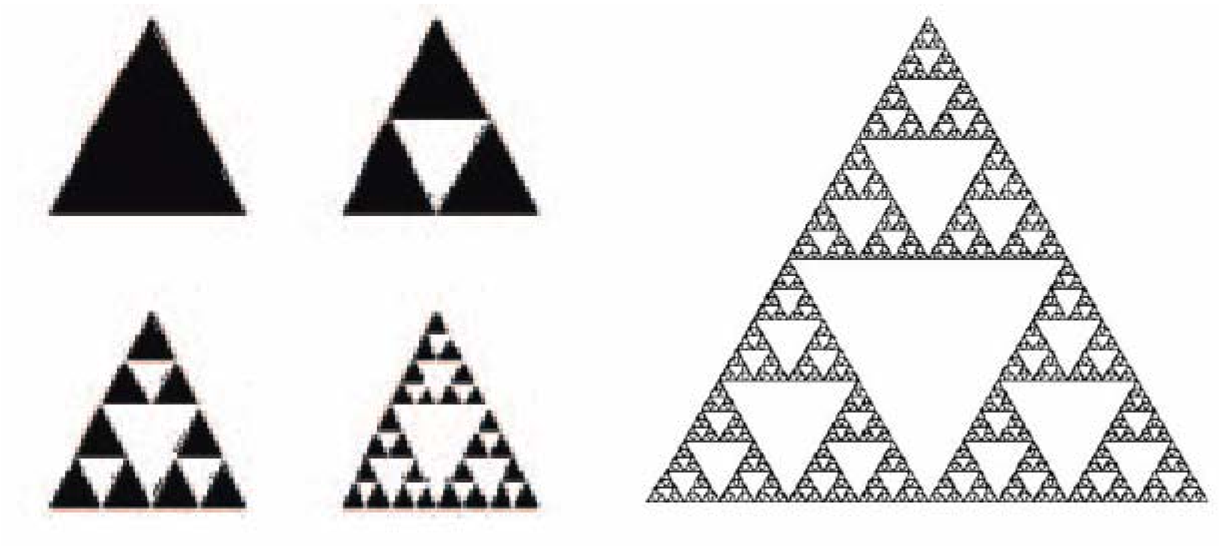
Lundi 11 Octobre 2004

Problème : On considère un triangle équilatéral $A_0B_0C_0$, (de côtés tous égaux) de longueur de côté 1, d'aire $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, peint en noir ; on désigne respectivement par A_1, B_1, C_1 les milieux des segments $[B_0, C_0], [A_0, C_0], [A_0, B_0]$ et on peint en blanc l'intérieur du triangle $A_1B_1C_1$. On effectue ensuite la même opération sur chacun des triangles encore noirs $A_0C_1B_1, C_1B_0A_1, B_1A_1C_0$ et ainsi de suite pour obtenir les figures en fin de page.

Pour tout entier naturel n, soit t_n le nombre de triangles équilatéraux encore noirs avant la $(n+1)$-ème opération, c_n le nombre total de leurs côtés, s_n le nombre total de leurs sommets et a_n la longueur de leur côté. On a donc : $t_0 = 1, c_0 = 3, s_0 = 3, a_0 = 1, t_1 = 3, c_1 = 9, s_1 = 6, a_1 = \frac{1}{2}$.

1. Expimer a_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
2. Soit n un entier naturel n. Exprimer les nombres $t_{n+1}, c_{n+1}, s_{n+1}$ à l'aide des nombres t_n, c_n, s_n. On trouvera : $t_{n+1} = 3t_n, c_{n+1} = 3c_n, s_{n+1} = c_n + s_n$.
3. Montrer qu'il existe une suite de réels $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant, pour tout entier naturel non nul n : $s_n = u_nc_0 + s_0$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$
4. Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, u_n uniquement en fonction de n.
5. Utiliser les résultats de la question précédente pour montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $t_n = 3^n, c_n = 3^{n+1}, s_n = \frac{3}{2}(1 + 3^n)$.
6. Pour tout entier naturel n, on désigne par b_n le nombre de triangles équilatéraux déjà peints en blanc avant la $(n+1)$-ème opération.
   (a) Calculer, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} - b_n$ en fonction de t_n, puis b_{n+1} en fonction uniquement de n.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'égalité : $1 + t_n + b_n - c_n + s_n = 2$ (*relation d'Euler*)
7. Pour tout entier naturel n, on note p_n la somme des périmètres des triangles encore noirs avant la $(n+1)$-ème opération et S_n la surface déjà peinte en blanc.
   (a) Exprimer p_n en fonction de n, pour tout entier naturel n, et déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 0}$.
   (b) Etablir, pour tout entier naturel n l'égalité : $S_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.
   En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$. Ce résultat était-il prévisible ?
   (c) Montrer qu'il existe un réel D que l'on pr'cisera, compris strictement entre 1 et 2 et v'rifiant pour tout entier naturel n : $t_n = \left(\frac{1}{a_n}\right)^D$. *La surface noire est connue sous le nom de Joint de Culasse de Sierpinsky ; D est appelé sa dimension fractale.*

<u>Source</u> : *Concours HEC 2003. Option technologique.*



FIN

Mamouni My Ismail
CPGE Med V-Casablanca