.

DS 1 : Théorie des ensembles.

Durée : 2heures

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier les expressions suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}; \qquad P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right); \qquad Q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}}\right)$$

Exercice 2. La suite (u_n) dite de *Fibonacci* est définie par :

$$u_0 = 1 \; ; \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \; .$$

1) Montrer que $u_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on en déduire pour $\lim u_n$?

2) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n \; .$$

3) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

a) Démontrer la relation $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$ pour tout entier naturel n.

b) Démontrer la relation $v_{n+2} - v_n = \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fin et Bonne Chance.