DS 1 : *Ensembles. Applications Logie. Dénombrement.*

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Mardi 03 Octobre 2006.
Durée: 3heures.

EXERCICE 1. *(1 point.)*

On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intrus ?

EXERCICE 2. *(1 points.)*

Soit l'énoncé suivant : "Tout groupe de danseurs comprend au moins un sous-groupe formé que par des hommes et un sous-groupe dont au moins un danseur est une femme".

1) *(0.5 point.)* Traduire cet énoncé avec des symboles mathématiques.

2) *(0.25 point.)* Donner la négation de votre formulation mathématiques.

3) *(0.25 point.)* Écrire la négation de l'énoncé ci-dessus.

EXERCICE 3. *(2 points.)*

Puissances factorielles descendantes et formule de Van Der Monde.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x^{[n]} = x(x-1)\ldots(x-n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$, et par convention $x^{[0]} = 1$.

1) *(0.25 point.)* Calculer $2^{[3]}$.

2) *(1.5 points.)* Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(x+y)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{[k]} y^{[n-k]}$$

Indication : On pourra raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la formule $x^{[n+1]} = x^{[n]}(x-n)$.

3) *(0.25 point.)* A-t-on $(xy)^{[n]} = x^{[n]} y^{[n]}$?

EXERCICE 4. *(1 points.)*

Dans tout l'exercice on considère $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

1) *(0.25 point.)* Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$.

Indication : Penser à utiliser la formule du triangle de Pascal.

2) *(0.75 point.)* En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \prod_{j=1}^{p} (i+j)$

EXERCICE 5. *(3 points.)*

Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

1) *(0.5 point.)* Soit $k \in [|1,n|]$, combien y a-t-il de parties $X \subset E$ tel que $\mathrm{Card}(X) = k$ et $x_1 \in X$.

2) *(1 points.)* On fixe X vérifiant la question a), combien y a-t-il de parties $Y \subset E$ tel que $X \cap Y = \{x_1\}$.

3) *(1.5 points.)* Combien y a-t-il de couples (X,Y) tel que $X \cap Y$ soit un singleton.