Exercice 1. : Soient E et F deux ensembles finis non vides et de même cardinal. Soit f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ vérifiant les propriétés :

- (i) : $f(\emptyset) = \emptyset$
- (ii) : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ \ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- (iii) : $\forall A \in \mathcal{P}(E)\ \ \text{card}(f(A)) \geqslant \text{card}(A)$

On dit que A est une partie normale de E lorsque $\text{card}(f(A)) = \text{card}(A)$
Notez bien que f est une application dont l'ensemble de départ est $\mathcal{P}(E)$ et non pas E.

1. Montrer que
   a) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ \ A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
   b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ \ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. Montrer que si A et B sont des parties normales de E, $A \cup B$ et $A \cap B$ sont aussi des parties normales de E et $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. Montrer que $H = \{\text{card}(A)\ ;\ A \text{ partie normale de } E \text{ non vide}\}$ admet un plus petit élément k_0.
   Pour la suite A_0 désigne une partie normale de cardinal k_0.
4. Montrer que si A est une partie normale de E, $A_0 \subset A$ ou $A \cap A_0 = \emptyset$.
5. Soit x un élément de A_0 ; soit y un élément de $f(\{x\})$. On note $E' = E \backslash \{x\}$ et $F' = F \backslash \{y\}$, et on considère $f' : \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(E') \to \mathcal{P}(F') \\ A \longmapsto f(A) \cap F' \end{array} \right.$. Montrer que f' vérifie les propriétés $(i), (ii)$ et (iii). (on pourra prouver que si A est une partie normale de E' (pour f) alors $y \notin f(A)$.