ESSEC 2004, math 2, option scientifique

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E_n = \{1, 2, \ldots, n\} = [\![1, n]\!]$ et Ω l'ensemble des permutations de E_n.
Pour tout ensemble fini A, on note $\text{Card}(A)$ son cardinal, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.
On note $\binom{n}{k}$, ou C_n^k le nombre $\begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Partie I

Pour tout $\omega \in \Omega$, on appelle *point fixe* de ω, tout élément $k \in E_n$ tel que $\omega(k) = k$.
On appelle *dérangement* toute permutation $\omega \in \Omega$ telle que pour tout $k \in E_n$, $\omega(k) \neq k$. Ainsi un dérangement est une permutation sans point fixe.
On note $D_{n,0} = \{\omega \in \Omega / \forall i \in E_n,\ \omega(i) \neq i\}$, et pour tout $k \in E_n$

$$D_{n,k} = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ admet exactement } k \text{ points fixes}\}$$

Enfin, on note $d_{n,0} = \text{Card}(D_{n,0})$ et pour tout $k \in E_n$, $\quad d_{n,k} = \text{Card}(D_{n,k})$.

1) Montrer que

$$D_{n,k} = \bigcup_{\substack{I \subset E_n \\ \text{Card}(I)=k}} \left\{\omega \in \Omega / \omega|_I = \mathit{Id} \quad \text{et} \quad \omega|_{E_n \setminus I} \text{ est un dérangement}\right\}$$

où $\omega|_I$ est la restriction de la permutation ω à I, Id représente la permutation identité, et $\omega|_{E_n \setminus I}$ est la restriction de la permutation ω au complémentaire de I.

2) En déduire que pour tout $k \in E_n$, $d_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k,0}$.

3)a) Soit $\omega \in \Omega$ un dérangement de E_n. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On définit l'application $\widetilde{\omega_j}$ sur E_{n+1} par

$$\widetilde{\omega_j}(k) = \begin{cases} \omega(k) & \text{si } k \notin \{j, n+1\} \\ n+1 & \text{si } k = j \\ \omega(j) & \text{si } k = n+1 \end{cases}$$

Montrer que l'on définit ainsi un dérangement de E_{n+1}.

b) Soit $\omega \in \Omega$ admettant un unique point fixe $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\widetilde{\omega_j}$ défini ci-dessus est un dérangement de E_{n+1}.

c) Montrer que les dérangements de E_{n+1} construits dans les questions 3.a) et 3.b) sont distincts, et que tout dérangement de E_{n+1} peut être obtenu de cette façon.

d) En déduire que $d_{n+1,0} = n d_{n,0} + d_{n,1} = n(d_{n,0} + d_{n-1,0})$.

4) Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $\qquad u_n = d_{n,0} - n d_{n-1,0}$

a) Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n, puis u_n en fonction de n.

b) En déduire que $d_{n,0} = n d_{n-1,0} + (-1)^n$.

c) On pose $v_1 = 0$ et pour $n \geqslant 2$, $v_n = \dfrac{d_{n,0}}{n!}$. Déterminer v_n en fonction de n, puis montrer que

$$d_{n,0} = n! \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \Big)$$

Partie II

Afin de lancer un nouveau produit sur le marché, le service marketing d'une entreprise propose au directeur général la campagne suivante

- mettre en vente au prix unitaire de b Euros, n exemplaires du produit,
- chaque exemplaire sera numéroté de façon apparente d'un nombre compris entre 1 et n,
- à l'intérieur de chaque exemplaire du produit, et de façon cachée, se trouve un second numéro,