DS 1 : *Ensembles. Applications Logie. Dénombrement.*

Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

CORRIGÉ

Exercice 1.

On compare deux paquets de trois billes. Si l'un est plus lourd que l'autre, c'est qu'il contient l'intrus. Sinon, l'intrus est parmi les trois billes restantes. Ainsi, on sait dans quel paquet de trois billes se situe l'intrus. Dans ce celui-ci, on compare deux billes. Si l'une est plus lourde que l'autre, c'est l'intrus. Sinon, l'intrus est la troisième.

Exercice 2.

1) Notons par, D l'ensemble des danseurs, H celui des hommes, et F celui des femmes. L'énoncé peut se traduire ainsi :

$$\forall A \subset D,\ \exists B \subset A \text{ tel que } B \subset H \text{ et } \exists B \subset A \text{ tel que } B \cap F \neq \emptyset$$

2) La négation de notre formulation mathématiques est alors :

$$\exists A \subset D,\ \forall B \subset A \text{ tel que } \text{ on a : } B \subseteq H \text{ et } \forall B \subset A \text{ tel que } B \cap F = \emptyset$$

3) La négation de l'énoncé devient : Il existe un groupe de danseurs qui contient un sous-groupe contenant une femme et un sous-groupe ne contenant aucune femme.

Exercice 3.

1) $2^{[3]} = 2 \times (2-1) \times (2-2) = 0$.

2) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que c'est vari pour $n = 0$.
Supposons que $(x+y)^{[n]} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{[k]} y^{[n-k]}$, en utulisant le fait que $x^{[k+1]} = x^{[k]}(x-k)$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{[n+1]} &= (x+y)^{[n]}(x+y-n) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{[k]}y^{[n-k]}\right)(x+y-n) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{[k]}y^{[n-k]}\right)(x-k+y-n+k) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{[k]}(x-k)y^{[n-k]} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{[k]}y^{[n-k]}(y-n+k) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{[k+1]}y^{[n-k]} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{[k]}y^{[n+1-k]} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{[k]}y^{[n+1-k]} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{[k]}y^{[n+1-k]} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)x^{[k]}y^{[n+1-k]} + x^{[n+1]} + y^{[n+1]} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{[k]}y^{[n+1-k]} + x^{[n+1]} + y^{[n+1]} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{[k]}y^{[n+1-k]}
\end{aligned}
$$

3) Non car $(2\times 3)^{[3]} = 6^{[3]} = 6.5.4 = 120$, mais $2^{[3]}\times 3^{[3]} = 0$.

Exercice 4.

1) On va raisonner par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ avec p fixé.
Le résultat est évidemment vérifié pour $n=0$, supposons qu'il est pour un $n\in\mathbb{N}$ et montrons qu'il est encore vrai pour $n+1$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}\binom{p+k}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k} + \binom{p+n+1}{n+1} \\
&= \binom{p+n+1}{n} + \binom{p+n+1}{n+1} \\
&= \binom{p+n+2}{n+1}
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\prod_{j=1}^{p}(i+j) &= \sum_{i=0}^{n}(i+1)\times ...\times(i+p) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{(i+p)!}{i!} \\
&= p!\sum_{i=0}^{n}\binom{i+p}{i} \\
&= p!\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k} \\
&= p!\binom{p+n+1}{n+1} \\
&= \frac{(p+n+1)!}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

Exercice 4.

1) Il y en a $\binom{n-1}{k-1}$, car il faut choisir $k-1$ autres éléments que x_1 parmi $x_2,\dots,x_n$.

2) Les parties $Y\subset E$ tel que $X\cap Y=\{x_1\}$, sont les parties $Y\subset \overline{X}\cup\{x_1\}$, il y en a exactement $\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(\overline{X}\cup\{x_1\}\big) = 2^{n-k+1}$

3) D'aprés les deux questions précédentes, on peut affirmer que le nombre de couples (X,Y) tel que $\mathrm{card}(X)=k$ et $X\cap Y=\{x_1\}$ est exactement $\binom{n-1}{k-1}2^{n-k+1}$, donc le nombre total de (X,Y) tel que $X\cap Y = \{x_1\}$ est exactement $\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}2^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}2^{n-k} = 3^{n-1}$. Comme il y a exactement n singletons, alors le nombre total de (X,Y) tel que $X\cap Y$ soit un singleton est exactement $n3^{n-1}$.

Exercice 5.

1) a) $A\subset B \Longrightarrow B = A\cup X \Longrightarrow f(B) = f(A\cup X) = f(A)\cup f(X)$.
$\Longrightarrow f(A)\subset f(B)$

b) $A\cap B\subset A$ et $A\cap B\subset B \Longrightarrow f(A\cap B)\subset f(A)$ et $f(A\cap B)\subset f(B$
$\Longrightarrow f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

2) $$\begin{aligned}\text{card}(A\cap B) &\leq \text{card}\,(f(A\cap B)) && \text{d'aprés } iii)\\ &\leq \text{card}\,(f(A)\cap f(B)) && \text{d'aprés } b)\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\text{card}\,(f(A\cup B)) &= \text{card}\,(f(A)\cup f(B))\\ &= \text{card}\,(f(A))+\text{card}\,(f(B))-\text{card}\,(f(A)\cap f(B))\\ &= \text{card}\,(A)+\text{card}\,(B)-\text{card}\,(f(A)\cap f(B))\\ &\leq \text{card}\,(A)+\text{card}\,(B)-\text{card}\,(A\cap B)\\ &= \text{card}\,(A\cup B)\end{aligned}$$

Ainsi $\text{card}\,(f(A\cup B))\leq \text{card}\,(A\cup B)$, or $\text{card}\,(f(A\cup B))\geq \text{card}\,(A\cup B)$, d'aprés $iii)$, d'où égalité et donc $A\cup B$ est normale. D'autre part : $\text{card}\,(A\cup B) = \text{card}\,(f(A\cup B)) = \text{card}\,(f(A)\cup f(B))$, donc : $\text{card}\,(A)+\text{card}\,(B)-\text{card}\,(A\cap B) = \text{card}\,(f(A))+\text{card}\,(f(B))-\text{card}\,(f(A)\cap f(B))$, or $\text{card}\,(f(A)) = \text{card}\,(A)$, $\text{card}\,(f(B)) = \text{card}\,(B)$, donc $\text{card}\,(f(A)\cap f(B)) = \text{card}\,(A\cap B)\leq \text{card}\,(f(A\cap B))$, d'aprés b) on a : $\text{card}\,(f(A\cap B)) \leq \text{card}\,(f(A)\cap f(B)) = \text{card}\,(A\cap B)$, d'où l'égalité : $\text{card}\,(f(A\cap B)) = \text{card}\,(f(A)\cap f(B)) = \text{card}\,(A\cap B)$, donc $A\cap B$ est normale avec $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ car $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$ et $\text{card}\,(f(A\cap B)) = \text{card}\,(f(A)\cap f(B))$.

3) $f(E)\subset F$, donc $\text{card}\,(f(E))\leq \text{card}\,(F) = \text{card}\,(E)$, or $\text{card}\,(f(E))\geq \text{card}\,(E)$, d'où egalité, et donc E est normale, d'où $\text{card}\,(E)\in H$, ainsi H est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, donc admet un plus petit élément.

4) Supposons $A\cap A_0\neq\emptyset$, on a $A\cap A_0$ est normale, donc $\text{card}\,(A\cap A_0)\in H$, d'où $\text{card}(A_0)\leq \text{card}\,(A\cap A_0)$, or $A\cap A_0\subset A_0$ d'ou égalite et par suite $A\cap A_0 = A_0$, donc $A_0\subset A$

Exercice 6.

1) $\omega\in D_{n,k}\Longleftrightarrow \exists I\subset E_n$ tel que $\text{card}(I)=k; w(k)=k\ \forall k\in I$ et $w(k)\neq k\ \forall k\in E_n\setminus I$, donc $\omega|_I = id$ et $\omega|_{E_n\setminus I}$ est un dérangement

2) $d_{n,k} = \begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix} d_{n-k,0}$ car il y a exactement $\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}$ parties $I\subset E_n$ tel que $\text{card}(I)=k$ et il y a exactement $d_{n-k,0}$ dérangement sur $E_n\setminus I$ puisque son cardinal vaut $n-k$.

3) a) Evident.

b) Encore évident.

c) Pour la question 3.a) on a $\overline{w_j}(n+1)=w(j)\neq j$ et pour la question 3.b) on a $\overline{w_j}(n+1)=w(j)=j$, dans les deux permutations sont différentes.

d) Soit w un dérangement de E_{n+1}, posons $w(n+1)=j$, si $w(j)=n+1$, alors w peut être définie à partir de 3.a) dans le cas contraire elle peut être définie à partir de 3.b)

e) $d_{n+1,0}=nd_{n,0}+d_{n,1}$ car il y n façons de choisir j et $d_{n,0}$ dérangements dans 3.a), alors qu'il y a $d_{n,1}$ dérangements dans 3.b) d'autre part $d_{n,1}=nd_{n-1,0}$ car $d_{n,1}$ est le nombre de permutations ayant un seul point fixe, or ce point fixe peut avoir n valeurs possibles de 1 à n, une fois ce point fixe enlvé on obtient une permutation sur $n-1$ éléments sans points fixe, donc $d_{n-1,0}$, d'où $d_{n+1,0}=nd_{n,0}+d_{n,1}=n(d_{n,0}+d_{n-1,0})$

4) a) $u_{n+1}=d_{n+1,0}-(n+1)d_{n,0}=n(d_{n,0}+d_{n-1,0})-(n+1)d_{n,0}=-d_{n,0}+nd_{n,0}=-u_n$, donc $u_n=(-1)^{n-2}u_2=(-1)^{n-2}=(-1)^n$

b) Découle de a)

c) D'aprés 4.b) on a : $v_n = v_{n-1}+\dfrac{(-1)^n}{n!}$ et donc $v_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$, d'où

$$d_{n,0}=n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right).$$

Fin.