DS COMMUN : *Théorie des ensembles. Dénombrement.*

MPSI 1, 2 & 3.
La Résidence Prépas.

Casablanca
2007-2008

Lundi 08 Octobre 2008

Durée 4 heures.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

Exercice 1

Soit A et B deux ensembles, Montrer que :

1) $A \subset B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
   Étudier la réciproque.
2) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
3) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.
   Á l'aide d'un contre exemple, montrer que l'inclusion est stricte.

Exercice 2

Soit x un nombre réel.

1) Calculer pour tout entier n, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.
   En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k}$.
2) A l'aide du changement de variable $j = k-1$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} n C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$.
3)
   a) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout entier $k \leqslant n$, on a $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.
   b) En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ puis celle de $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.
4) On suppose dans la suite que $n \geqslant 2$.
   a) Exprimer $(k-1)C_{n-1}^{k-1}$ en fonction de C_{n-2}^{k-2}.
   b) En déduire l'expression de $k(k-1)C_n^k$ en fonction de C_{n-2}^{k-2}.
   c) Calculer $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ puis $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.
5) Développer $k(k-1)$ puis en déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.
6) En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - (\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k})^2 = nx(1-x)$.

Exercice 3

On appelle quadrillage toute partie de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, surlaquelle on se déplace de la gauche vers la droite, ou bien du bas en haut, autrement dit dans le sens positif des axes du répère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $A = (n, p)$ un point du quadriallage.

1) Montrer que le nombre de chemins menant de O vers A est exactement C_{n+p}^n.
2) Soit $B = (i, j)$ un autre point du quadriallage tel que $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq p$.
   Donner, en le justifiant, le nombre de chemins menant de O vers A passant par B.
3) Dans cette question, on prend $n = p$, donc $A = (n, n)$.
   a) Montrer que tout chemin de O vers A, coupe la droite $\mathcal{D}$ d'equation $x + y = n$ en un seul point.
   b) En déduire la relation : $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$
   c) En déduire une expression simple de la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} k(C_n^k)^2$.

Exercice 4

Sur $\mathcal{A}=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on définit la relation suivante :

$$f\mathcal{R}g \textit{ si et seulement si } \exists h\in\mathcal{B} \text{ tel que } f=h\circ g\circ h^{-1}$$

Où $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
2) Déterminer la classe d'équivalence de $id_{\mathbb{R}}$.
   On rappelle qu'en général la classe de $f\in\mathcal{A}$ est formée par les $g\in\mathcal{A}$ tel que $f\mathcal{R}g$.
3) Soit $f\in\mathcal{A}$, on pose $C_f=\{h\in\mathcal{B} \text{ tel que } f=h\circ f\circ h^{-1}\}$.
   a) Montrer que $h\in C_f \Longrightarrow h^{-1}\in C_f$.
   b) Montrer que $(h_1,h_2)\in C_f\times C_f \Longrightarrow h_1\circ h_2\in C_f$.
4) Dans cette question, on considère $f,g\in\mathcal{A}$ tel que $f\mathcal{R}g$.
   a) Montrer que :
      i. f injective *si et seulement si* g injective.
      ii. f surjective *si et seulement si* g surjective.
      iii. f bijective *si et seulement si* g bijective, et que dans ce cas, on a : $f^{-1}\mathcal{R}g^{-1}$.
   b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f^n=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ fois}}$.
      Montrer que $f^n\mathcal{R}g^n$.
   c) Soit $a\in\mathbb{R}$, montrer que $f(a)=a$ *si et seulement si* $g(a)=a$.
      Les applications $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&\mathrm{e}^x\end{array}$ et $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&\mathrm{e}^{x+1}-1\end{array}$ sont-elles en relation ?
5) Un exemple :
   a) Soit $u\in\mathbb{R}$ fixe, résoudre dans $\mathbb{R}$, l'equation $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}=u$.
   b) En déduire que l'application $\mathrm{sh}:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\end{array}$ est bijective, puis donner son application réciproque.
   c) En déduire que les applications $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&2x\end{array}$ et $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&2x\sqrt{1+x^2}\end{array}$ sont en relation.

Fin.