DS blanc 1 : *Ensembles, relations et récurrence*

Samedi 02 Octobre 2004

Durée : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appr'ciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une régle graduée est autorisée.

Exercice 1:

Donner le tableau de vérité des propostions suivantes :

i) P=($\rceil p_1$ ou p_2) et (p_1 ou $\rceil p_2$ ou $\rceil p_3$)

ii) Q=(p_2) et ($\rceil p_1$ ou $\rceil p_3$) et ($\rceil p_2$) et (p_1 ou $\rceil p_3$ ou $\rceil p_4$).

iii) R=(p_2) et ($\rceil p_1$ ou $\rceil p_2$) et (p_1 ou $\rceil p_2$) et (p_1 ou $\rceil p_2$ ou $\rceil p_3$).

Exercice 2:

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Montrer que pour tout partie A de E on a : $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$.
2. On suppose f surjective, montrer alors que $\forall (B, C) \in \mathcal{P}(F)^2 : f^{-1}(B) = f^{-1}(C) \implies B = C$.

Exercice 3:

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On pose $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(E) \text{ tel que : } f^{-1}(f(A)) = A\}$.

1. Montrer que pour tout partie A de E on a : $f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{F}$.
2. Montrer que l'intersection, ou ruénion de deux éléments A, B de $\mathcal{F}$ est aussi un élément de $\mathcal{F}$.
3. Soit $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{P}(E)$ tels que : $A \cap B = \emptyset$. Montrer que : $A \cap f^{-1}(f(B)) = \emptyset$.
4. Soit $(A, B) \in \mathcal{F}^2$ tels que : $A \subset B$. Montrer que : $B \setminus A \in \mathcal{F}$.

Exercice 4:

Les relations suivantes définies sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont-elles des relations d'ordre ? Pour ceux qui le sont préciser si l'ordre est total ou partiel, et donner le min et max, quand ils existent pour la partie $A = \{(1,2),(1,3),(2,1),(0,4)\}$.

1. $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a+b \leq c$.
2. $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a < c$ ou $b+c \leq a+d$.
3. $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a \leq c$ et $a+b \leq c+d$.

Exercice 5:

Démontrer par récurrence que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times (k!) = (n+1)! - 1$.

Barème :

Exercice 1 : (4 pts)	Exercice 2 : (3 pts)	Exercice 3 : (3 pts)	Exercice 4 : (3 pts)	Exercice 5 : (3 pts)
$i)1.5pts$ $ii)1pt$ $iii)1.5pts$	$1)1.5pts$ $2)1.5pts$	$1)1.5pts$ $2)2pts$ $3)1.5pts$ $4)2pts$	$1)1pt$ $2)1pt$ $3)1pt$	$1)1.5pts$ $2)1.5pts$

FIN

Mamouni My Ismail
CPGE Med V-Casablanca