Corrigé DS 1 : *Ensembles, relations et récurrence*

Samedi 02 Octobre 2004

Exercice 1:

1.

			$(\rceil p_1$ ou $p_2)$	$(p_1$ ou $\rceil p_2$ ou $\rceil p_3)$	P
p_1 vraie	p_2 vraie	p_3 vraie	vraie	vraie	vraie
p_1 vraie	p_2 vraie	p_3 fausse	vraie	vraie	vraie
p_1 vraie	p_2 fausse	p_3 vraie	fausse		fausse
p_1 vraie	p_2 fausse	p_3 fausse	fausse		fausse
p_1 fausse	p_2 vraie	p_3 vraie		fausse	fausse
p_1 fausse	p_2 vraie	p_3 fausse	vraie	vraie	vraie
p_1 fausse	p_2 fausse	p_3 vraie	vraie	vraie	vraie
p_1 fausse	p_2 fausse	p_3 fausse	vraie	vraie	vraie

2. Le connecteur logique "et" étant commutatif, donc : Q=(p_2) et $(\rceil p_2)$ et $(\rceil p_1$ ou $\rceil p_3)$ et $(p_1$ ou $\rceil p_3$ ou $\rceil p_4)$ fausse, car (p_2) et $(\rceil p_2)$ est toujours fausse.

3.

			$(\rceil p_1$ ou $\rceil p_2)$	$(p_1$ ou $\rceil p_2)$	$(p_1$ ou $\rceil p_2$ ou $\rceil p_3)$	R
p_1 vraie	p_2 vraie	p_3 vraie	fausse			fausse
p_1 vraie	p_2 vraie	p_3 fausse	fausse			fausse
p_1 vraie	p_2 fausse	p_3 vraie				fausse
p_1 vraie	p_2 fausse	p_3 fausse				fausse
p_1 fausse	p_2 vraie	p_3 vraie		fausse		fausse
p_1 fausse	p_2 vraie	p_3 fausse		fausse		fausse
p_1 fausse	p_2 fausse	p_3 vraie				fausse
p_1 fausse	p_2 fausse	p_3 fausse				fausse

Exercice 2:

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. $y \in f(f^{-1}(f(A))) \Leftrightarrow \exists x \in f^{-1}(f(A))$ tel que : $y = f(x)$, or $x \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow y \in f(A)$. D'ou l'égalité.
2. On suppose f surjective, et soient $(B, C) \in \mathcal{P}(F)^2$ tel que : $f^{-1}(B) = f^{-1}(C)$. Donc $y \in B \implies \exists x \in E$ tel que : $y = f(x) \implies f(x) \in B \implies x \in f^{-1}(B) \implies x \in f^{-1}(C) \implies f(x) \in C \implies y \in C$. D'où $B \subset C$. De même on montre que $C \subset B$. D'où l'égalité.

Exercice 3:

1. Montrons que pour tout partie A de E on a : $f^{-1}(f(f^{-1}(f(A)))) = f^{-1}(f(A))$. En effet $x \in f^{-1}(f(f^{-1}(f(A)))) \Leftrightarrow f(x) \in f(f^{-1}(f(A))) \Leftrightarrow \exists x' \in f^{-1}(f(A))$ tel que: $f(x) = f(x') \Leftrightarrow x' \in E$ tel que: $f(x) = f(x') \in f(A) \Leftrightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(A))$. D'où l'égalité.

2. Soient deux éléments A, B de $\mathcal{F}$, donc $f^{-1}(f(A)) = A, f^{-1}(f(B)) = B$, d'aprés le cours on sait que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B), f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B'), f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$. Donc $f^{-1}(f(A \cup B)) = f^{-1}(f(A) \cup f(B)) = f^{-1}(f(A)) \cup f^{-1}(f(B)) = A \cup B$, d'où $A \cup B \in \mathcal{F}$.
   $f^{-1}(f(A \cap B)) \subset f^{-1}(f(A) \cap f(B)) = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(f(B)) = A \cap B$, et on reprend encore l'exercice du TD pour montrer que : $A \cap B \subset f^{-1}(f(A \cap B))$, d'où l'égalité et donc $A \cap B \in \mathcal{F}$.
3. Supposons $A \cap f^{-1}(f(B)) \neq \emptyset$. $x \in A \cap f^{-1}(f(B)) \implies x \in A, f(x) \in f(B) \implies x \in A, \exists x' \in B$ tel que: $f(x) = f(x')$, or $x \in A$, d'où $f(x') = f(x) \in f(A)$ d'où $x' \in f^{-1}(f(A)) = A$, d'où $x' \in A \cap B = \emptyset$. Absurde.
4. Posons $B' = B \setminus A$, on a : $B' \cap A = \emptyset$, d'aprés la question précédente $f^{-1}(f(B')) \setminus A = \emptyset$ (1), or $f(B') \subset f(B)$ car $B' \subset B$, d'où $f^{-1}(f(B')) \subset f^{-1}(f(B)) = B$ (2) car $B \in \mathcal{F}$. Enfin (1) et (2) $\implies f^{-1}(f(B')) \subset B \setminus A = B'$. On reprend un exercice du TD pour montrer que $B' \subset f^{-1}(f(B'))$ d'où l'égalité et donc $B' = B \setminus A \in \mathcal{F}$.

Exercice 4:

1. $(1, 1)$ n'est pas en relation avec lui même donc $\mathcal{R}$ n'est pas reflexive et par suite n'est pas d'ordre.
2. On a : $(1, 1)\mathcal{R}(2, 0), (2, 0)\mathcal{R}(1, 1)$ mais $(1, 1) \neq (2, 0)$ donc $\mathcal{R}$ n'est pas antisymetrique et par suite n'est pas d'ordre.
3. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre (facile à démontrer) qui est partiel car on n'a ni $(1, 2)\mathcal{R}(2, 0)$ ni $(2, 0)\mathcal{R}(1, 2)$.

Exercice 5:

1. Le résultat est vrai pour $n = 1$.
   Supposons $\sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!$ donc $\sum_{k=0}^{n+1} k! = \sum_{k=0}^{n} k! + (n+1)! \leq 2(n+1)! \leq (n+2)(n+1)! = (n+2)!$.
2. On peut raisonner par récurrence ou bien remarquer que : $k \times (k!) = ((k + 1) - 1) \times k! = (k + 1)! - k!$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=0}^{n} k \times (k!) = \sum_{k=0}^{n} (k + 1)! - k! = (n + 1)! - 1$ car *somme telescopique.*

FIN

Mamouni My Ismail
CPGE Med V-Casablanca