DS 9 : Intégration sur un segment / Fonctions à deux variables / Équations différentielles

Lundi 31 Mai 2004

Durée : 3 heures 30 minutes

Préambule :
L'énoncé de cette épreuve comporte 3 pages .
Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation .Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées .
Le probléme I est tiré du concours 2003 Agro - Filiére BCPST .
Le probléme II est tiré d'un DS posé en PCSI en France .

Exerices : *Chaque question est notée sur 1 point.*

1. Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante : $2xy\dfrac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ en utilisant, par exemple, le changement de variable : $x = \dfrac{u^2+v^2}{2}$ et $y = \dfrac{u}{v}$.
2. Chercher les extrémums de la fonction $f(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$.
3. Calculer $I = \displaystyle\int\int_{\Delta} xydxdy$ où $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y \geq 0 \text{ et } (x+y)^2 \leq \dfrac{2x}{3}\right\}$.
   Poser $u = x, v = x+y$.
4. Résoudre l'équation différentielle : $(1+x)y' + y = (1+x)\sin x$.
5. Résoudre l'équation différentielle : $y" - 2y' + y = xe^x$.

Premier Problème .

Dans ce probléme E désigne l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ .On appelle polynôme toute fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans lui même :on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes et, pour tout entier naturel d , on note par $\mathbb{R}_d[X]$ l'ensemble des polynômes de dergé inferieur ou égal à d.On rappelle que,par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.
Pour tout élément f de E on note $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans lui même définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt.$$

Premiére Partie : exemples.

Soit ω un réel; on note f_ω l'application définie par :$\forall x \in \mathbb{R}, f_\omega(x) = e^{\omega x}$ et on note g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{lll} g(x) = & x & \forall x \in [0,1] \\ g(x) = & 2-x & \forall x \in [1,2] \\ g(x) = & 0 & \text{sinon} \end{array}$$

I.1. (0.75 pts) Déterminer pour tout réel ω les fonctions $T(f_\omega), T(g)$.

I.2. (0.75 pts) Soit $C = (O, i, j)$ un repère orthogonal du plan , $\mathcal{G}$ la courbe representative de g dans le repère C et Δ la droite d'équation $x = 1$ dans le repère C.

I.2.1. (0.5 pts) Montrer que Δ est un axe de symetrie de $\mathcal{G}$.

I.2.2. (0.75 pts) Tracer sommairement $\mathcal{G}'$ la courbe representative de $T(g)$ dans C.

I.2.3. (0.75 pts) Déterminer un axe de symétrie de $\mathcal{G}'$.

I.2.4. La fonction $T(g)$ est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

Deuxiéme partie : étude de T.

II.1. (0.75 pts) Montrer que, pour tout élément f de E ,l'application $T(f)$ appartient à E et est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer la dérivée de $T(f)$ et montrer que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

II.2. (0.5 pts) On note T l'application de E dans lui même définie par $f \mapsto T(f)$.

II.2.1 (0.5 pts) Rappeler pourquoi T est un endomorphisme de E .

II.2.2 (0.5 pts) T est-elle une application surjective .

II.3 On suppose que f est une application de E, bornée sur $\mathbb{R}$.

II.3.1 (0.5 pts) Montrer que $T(f)$ est également une application bornée sur R .

II.3.2 (0.75 pts) Montrer qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |T(f)(x) - T(f)(y)| \leq K|x - y|.$$

II.4 (0.5 pts) Montrer que si f est une fonction périodique de E alors $T(f)$ est aussi une fonction périodique sur $\mathbb{R}$.

II.5 (0.5 pts) Déterminer la parité de $T(f)$ en fonction de celle de f .

Troisiéme partie : étude de restrictions.

III.1.soit ω un réel non nul ; on note $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ les fonctions de E définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_1(x) = \cos(\omega x), \varphi_2(x) = \sin(\omega x), \varphi_3(x) = x\cos(\omega x), \varphi_4(x) = x\sin(\omega x)$$

On note F_ω le sous-espace vectoriel de E engendré par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.

III.1.1. (0.75 pts) On note $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base F_ω .

III.1.2. (1.5 pts) Calculer $T(\varphi_1), \ldots, T(\varphi_4)$ et en déduire que $T(F_\omega) \subset F_\omega$.

III.2. (0.75 pts) Dans la suite on note M_ω la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la restriction T_ω de T à F_ω définie par :

$$\begin{array}{rccc} T_\omega : & F_\omega & \longrightarrow & F_\omega \\ & f & \longrightarrow & T(f) \end{array}$$

III.2.1. (0.75 pts) Déterminer le rang de M_ω selon la valeur de ω .

III.2.2. (0.25 pts) Déterminer le noyau de M_ω selon la valeur de ω .

III.2.3. L'endomorphisme T_ω est-il injectif ?

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc