

**CONTRÔLE 5 : Équations différentielles.
Calcul de primitives.
Fractions rationnelles.**

MPSI-Maths.

Mr Mamouni : myismail1@menara.ma

Source disponible sur :

©<http://www.chez.com/myismail>

Vendredi 13 Avril 2007.

Durée: 2 heures.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précédente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroté les double feuille de la façon suivante : $1/n, 2/n, \dots, n/n$ où n est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.

- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

Barème.

Exercice 1	8 points	Exercice 2	4 points	Exercice 3	6 points
1)	1 point	1)	1 point	1)	1 point
2.a)	2 points	2)	1.5 point	2)	1 point
b)	1 point	3)	1.5 point	3)	1 point
c)	1 point			4)	0.5 point
d)	1 point			5)	0.5 point
3)	2 points			6)	2 points

Présentation et rédaction.

2 points.

EXERCICE I.*Équations différentielles.*

- 1) Selon la loi de Newton, le refroidissement d'un corps dans un courant d'air est proportionnel à la différence de température entre le corps et l'air.

Si la température de l'air est 30 degrés et que le corps passe de 100 degrés à 70 degrés en 15 minutes, au bout de combien de temps se trouvera-t-il à 40 degrés ?

- 2) Soit (E) : $(x^2 - 1)y' + 2xy = \frac{1}{x}$.
- Résoudre (E) sur les intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ et $]1, +\infty[$.
 - Étudier les raccordements des solutions aux points -1 et 1.
 - Dessiner les allures des courbes intégrales.
 - Combien y-a-t-il de solutions maximales ?

- 3) Résoudre l'équation différentielle suivante en discutant sur les valeurs des paramètres a et b .

$$y'' - 2y' + (1 - a^2)y = xe^{bx}$$

EXERCICE II.*Calcul de primitives.*

Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1) $\frac{x^2 + x + 1}{(x^2 - 1)^2}$.

2) $\frac{1}{\sin x \sqrt{\sin x(1 + \sin x)}}$.

On pourra utiliser le changement de variable, $t = \frac{1}{\sin x}$.

3) $\frac{2 + \sqrt{x+3}}{1 + \sqrt{x+4}}$.

EXERCICE III.*Fractions rationnelles.***Décomposition d'une fraction rationnelle à deux pôles.**

Soit a et b deux réels distincts, $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $F(X) = \frac{1}{(X-a)^n(X-b)^m}$, qu'on se propose de décomposer en éléments simples, pour cela on pose

$$F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(X-a)^{n-k}} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{b_k}{(X-b)^{m-k}}$$

- Décomposer en éléments simples la fraction $F(X) = \frac{1}{(X-a)(X-b)^2}$.
- Calculer a_0 et b_0 .
- On pose $G(X) = (X-a)^n F(X)$, calculer $G^{(k)}(a)$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$.

4) En déduire que $a_k = (-1)^k \frac{\binom{m+k-1}{k}}{(a-b)^{m+k}}$.

- 5) De façon pareille en déduire l'expression de b_k .

- 6) En prenant $a = 1$ et $b = -1$, simplifier les sommes suivantes :

$$S_{n,m} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{m+k-1}{k}}{2^{m+k}} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\binom{n+k-1}{k}}{2^{n+k}},$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n+k-1}{k}}{2^{n+k}}$$

Vérifier les résultats trouvés pour $n = 2, m = 3$

Fin.