MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Controle N°6

Samedi le:1-Mars-2003

Corrigé

Probléme 1

1. $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}e^{-\alpha t} = 1, \forall t \in]1,+\infty[\qquad |\frac{\sin t}{t}e^{-\alpha t}| \leq e^{-\alpha t}, I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt = [-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}$
2. $I_n = \frac{n}{\alpha}I_{n-1}$,
3. $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$
4. Cours
5. En multipliant les deux membres de l' inégalité précédente par $\frac{e^{-\alpha t}}{t}$, qui est positif, on obtient le résultat avec $K = \frac{1}{(2n+2)!}$.
6. $\frac{1}{(2n+2)!}I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+2)\alpha^{2n+2}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ car $\alpha \geq 1$ donc :$I = \lim_{n\to+\infty}\left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{I_{2n}}{(2n+1)!}\right)$Mais : $\forall k \in IN \quad I_k = \frac{k!}{\alpha^{k+1}}$,
7. Récurrence
8. $\forall x \in [0,1]$: $\left|\sum_{k=0}^{n}\int_0^x(-1)^k t^{2k}dt - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt\right| = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \leq \int_0^x t^{2n+2}dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$
9. $\forall x \in [0,1]$: $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x)$En particulier, pour $x = \frac{1}{\alpha}$, l'expression de I trouvée dans la question 3.c devient : $I = \arctan(\frac{1}{\alpha})$

Probléme 2 & **Exercice** Vus en TD