

DL 6 : Polynômes.
Intégration sur un segment.
Équations différentielles.

Maths-PCSI.

Mr Mamouni : myismail@altern.org

source disponible sur:

©<http://www.chez.com/myismail>

A rendre Vendredi le 17 Mars 2006.

PROBLÈME I : (*extrait du DS d'une prépa PCSI en France 2000-2001*)

PARTIE A :

Pour tout entier naturel n , on définit l'intégrale

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta \quad (\text{intégrales de Wallis}).$$

A.1. Montrer que la suite (W_n) est décroissante et convergente.

Montrer qu'elle vérifie la relation de récurrence :

$$nW_n = (n-1)W_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

A.2. Dédurre de ce qui précède les relations suivantes :

a) la suite $(nW_n W_{n-1})$ est constante ;

b) $W_n \sim W_{n-2}$, puis $W_n \sim W_{n-1}$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$ et préciser un équivalent simple de (W_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

A.3. Donner la valeur de W_{2p} et W_{2p+1} en fonction de p (on exprimera ces valeurs à l'aide de factorielles).

A.4. Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)! \sqrt{p}} = \sqrt{\pi}$ (*formule de Wallis*).

PARTIE B :

On définit deux fonctions numériques f et g sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x} \quad ; \quad g(x) = \frac{x^3}{6(x+1)(x+2)} - f(x).$$

B.1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

B.2. Donner l'expression de $g'(x)$; en déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in] -1, +\infty[$. **B.3.** On définit deux suites (u_n) et (v_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{n^n \sqrt{n}}{n! e^n} \quad ; \quad v_n = u_n \cdot e^{\frac{1}{12n}}.$$

Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot g\left(\frac{1}{n}\right).$$

B.4. Dédurre de ce qui précède que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite l , avec $l > 0$.

On pose maintenant $z_n = \frac{u_{2n}}{u_n^2}$.

B.5. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$. En déduire la valeur de l .

B.6. En déduire la *formule de Stirling* :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

PROBLÈME II : (*extrait du DS d'une prépa PCSI en France 2000-2001*)

Une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est définie par la donnée de $P_0 = X$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1}(X) = (n+1) \int_0^X P_n(t) dt + X \left[1 - (n+1) \int_0^1 P_n(t) dt\right].$$

1. Calculer P_1, P_2, P_3 et P_4 .

2. Montrer que, pour tout n , P_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les deux conditions

$$P_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad P_n(X) - P_n(X-1) = X^n.$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est divisible par $X^2 + X$. Factoriser les polynômes P_1, P_2 et P_3 . Ecrire P_4 sous la forme $X(X+1)Q_4$.

4. Montrer que le polynôme P_n est de degré $n+1$, calculer son coefficient dominant, ainsi que le coefficient de X^n .

5. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a $P_n(p) = \sum_{k=1}^p k^n$.

PROBLÈME III : (*extrait de : Mines d'Alès, 1992*)

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction f_n de la variable réelle x définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f_n(x) = \sin(2n \operatorname{Arcsin} x).$$

A.1. Étudier la parité de f_n ; calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$.

A.2. Résoudre, dans $[0, 1]$, l'équation $f_n(x) = 0$.

A.3. Démontrer que f_n est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$ et calculer $f_n'(x)$.

A.4. Étudier la dérivabilité de f_n en 1 à gauche, en -1 à droite.

A.5. Calculer l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

A.6. Étudier f_1 et tracer sa courbe représentative C_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4 cm).

A.7. Calculer, en cm^2 , l'aire \mathcal{A} de l'ensemble des points du plan de coordonnées x et y vérifiant

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f_1(x) \end{cases}$$

B.1. Pour tout entier naturel non nul p et pour tout réel x de $[0, 1[$, on considère l'intégrale

$$J_p(x) = \int_0^x \frac{f_p^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

a. Calculer $J_p(x)$ et l'exprimer en fonction de $f_{2p}(x)$.

b. Déterminer, si elle existe, la limite de $J_p(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

B.2. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels non nuls avec $p > q$, et pour tout réel x de $[0, 1[$, on considère l'intégrale

$$K_{p,q}(x) = \int_0^x \frac{f_p(t) f_q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

- a. Calculer $K_{p,q}(x)$ et l'exprimer en fonction de $f_{p+q}(x)$ et $f_{p-q}(x)$.
 b. Déterminer, si elle existe, la limite de $K_{p,q}(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

C.1. En utilisant la formule de Moivre, démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , il existe un polynôme P_n à coefficients entiers relatifs tel que, pour tout réel θ , on ait l'égalité

$$\sin(2n\theta) = \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot P_n(\sin \theta) .$$

C.2. Dédurre de la relation précédente que, pour tout réel x de $[-1, 1]$:

$$f_n(x) = x \sqrt{1-x^2} P_n(x) .$$

Expliciter $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

C.3. Montrer que l'on peut écrire $P_n(x)$ sous la forme

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x^2 + \dots + a_p x^{2p} \quad (p \in \mathbb{N} ; a_p \neq 0)$$

et déterminer en fonction de n les valeurs de p , a_p , $P_n(0)$ et $P_n(1)$.

C.4. Résoudre successivement dans $[0, 1]$, dans $[-1, 1]$ puis dans \mathbb{R} , l'équation $P_n(x) = 0$.

C.5. En déduire la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme P_n .

PROBLÈME IV : (*extrait d'un Bac français 2004*)

Aucune connaissance de physique n'est nécessaire pour résoudre cet exercice.

Un condensateur de capacité C , ($C = 5 \cdot 10^{-5}$ farads) se décharge dans une résistance sans self R , ($R = 104$ ohms).

La différence de potentiel u (exprimée en volts), l'intensité i (exprimée en ampères) et la quantité de charges q (exprimée en coulombs) sont des fonctions du temps t (exprimé en secondes).



- 1) Sachant qu'à tout instant t on a : $u(t) + Ri(t) = 0$, $q(t) = Cu(t)$, $i(t) = q'(t)$
 établir que u vérifie l'équation différentielle : $u' + 2u = 0$.
- 2) Résoudre l'équation différentielle : $u' + 2u = 0$.
 Trouver la solution particulière qui vérifie : $u(0) = 30$
- 3) Déterminer l'instant t_1 pour lequel la différence de potentiel u est égale au quart de sa valeur initiale $u(0)$.
- 4) Calculer l'énergie W (exprimée en joules) dissipée entre les instants $t = 0$ et $t = t_1$ (t_1 déterminé au 3.) sachant que :

$$W = \int_0^{t_1} Ri^2(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{u^2(t)}{R} dt$$

Donner la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

Fin.