بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé DS 2 (08-09): *Complexes et Dev. Limités Équations différentielles*

CPGE G.S. High Tech, Rabat

Exercice 1 .

1) **Soit** $(E)\quad y''(t)-3y'(t)+2y(t)=\varepsilon t\sin t+t\varepsilon 2t$
L'équation caractéristique est $(*)\quad r^2-3r+2=0$**, dont les solutions sont** $r_1=1$ **et** $r_2=2$ $(\Delta=1\neq 0)$**. Ainsi** $y_H(x)=A\varepsilon x+B\varepsilon 2x$**.**
Soit y_0 **une solution particulière de** (E)**, on prend** $y_0=y_1+y_2$ **où** y_1 **solution particulière de** $(E_1)\quad y''(t)-3y'(t)+2y(t)=\varepsilon t\sin t$ **et** y_2 **solution particulière de** $(E_2)\quad y''(t)-3y'(t)+2y(t)=t\varepsilon 2t$ **(principe de superposition).**
On prend $y_1=\mathrm{Im}(z_1)$ **où** Z_1 **solution particulière de** $(E_3)\quad y''(t)-3y'(t)+2y(t)=\varepsilon t\varepsilon it=\varepsilon(1+i)t$**, comme** $1+i$ **n'est pas solution de** $(*)$**, on prend** $z_0=\alpha\varepsilon(1+i)t$**.**
La valeur $\alpha\in\mathbb{C}$ **en injectant dans** (E_3)**, on trouve** $\alpha=-\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{-1+i}{2}$ **et enfin** $y_1=\mathrm{Im}(z_1)=-\frac{1}{2}\varepsilon t\mathrm{Im}\left((-1+i)\varepsilon it\right)=-\frac{1}{2}\varepsilon t\mathrm{Im}\left((-1+i)(\cos t+i\sin t)\right)=\frac{1}{2}\left(\sin t-\cos t\right)$

2) **Les calculs en Maple donnent**

```
> sin(x-sin(x)):=series(sin(x-sin(x)), x=0);
```

$$\sin(x-\sin(x)):=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{120}x^5+\mathrm{O}(x^6)$$

```
> sqrt(1+x^3):=series(sqrt(1+x^3)-x,x=0);
```

$$\sqrt{1+x^3}:=1-x+\frac{1}{2}x^3+\mathrm{O}(x^6)$$

Donc $\lim\limits_{0}\dfrac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1}=0$**.**

Exercice 2 .

1) a) **Si $x \equiv 0\ [2\pi]$, alors $\cos kx = 1$, donc $A_n = 1 + 2n$**

b) **Sinon**
$$\begin{aligned} A_n = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx &= 1 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon ikx\right) \\ &= 1 + 2\mathrm{Re}\left(\varepsilon ix\frac{1-\varepsilon inx}{1-\varepsilon ix}\right) \qquad \textbf{(somme géomètrique)} \\ &= 1 + 2\mathrm{Re}\left(\varepsilon i\tfrac{n+1}{2}x\frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right) \qquad (1-\varepsilon i\theta = -2i\sin\tfrac{\theta}{2}\varepsilon i\tfrac{\theta}{2}) \\ &= \frac{\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \\ &= \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2},x\right),\right) \qquad 2\cos a\sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b) \end{aligned}$$
.

2) **Faire la même discussion qu'auparavant, on ne traitera ici que le cas non évident.**
$$\begin{aligned} B_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k = &\ \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon(k+\frac{1}{2})ix,\right) = \mathrm{Im}\left(\varepsilon\tfrac{1}{2}ix\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon ikx\right) = \mathrm{Im}\left(\varepsilon\tfrac{1}{2}ix\frac{1-\varepsilon inx}{1-\varepsilon ix}\right). \\ = &\ \mathrm{Im}\left(\varepsilon i\tfrac{n}{2}x\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right) = \frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} C_n = &\ \sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{(\cos x)^k} = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon ikx}{\cos^k x}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\varepsilon ix}{\cos x}\right)^k\right) \\ = &\ \mathrm{Re}\left(\frac{1-\left(\dfrac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{e^{ix}}{\cos x}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(\cos x)^{n+1} - e^{i(n+1)x}}{(\cos x)^n(-i\sin x)}\right) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x(\cos x)^n} \end{aligned}$$

Exercice 3 .

Remarque : 1 est toujours une solution, on effectura donc une division euclidienne par $z-1$ pour trouver les autres solutions.

1) **la division euclidienne de $2z^2 - z - 1$ donne $z + \frac{1}{2}$ et celle de $3z^3 - z^2 - z - 1$ donne $3z^2 + 2z + 1$ dont les racines sont $\dfrac{-1+i\sqrt{2}}{3}$ et $\dfrac{-1-i\sqrt{2}}{3}$.**

2) **Soit z une solution de (E_p) tel que $|z| < 1$, donc $p < |pz^p| = |1 + z + \cdots + z^{p-1}| \leq 1 + |z| + \cdots + |z^{p-1}| < p$ (absurde)**

3) a) **Soit $z = \varepsilon i\theta \neq 1$ une solution de (E_p) donc $p\varepsilon ip\theta = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(\varepsilon i\theta)^k = \frac{1-\varepsilon ip\theta}{1-\varepsilon i\theta} = \varepsilon i\tfrac{p-1}{2}\theta\frac{\sin\dfrac{p\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$, d'où $e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{p\theta}{2}}{p\sin\dfrac{\theta}{2}}$.**

b) **D'après ce qui précède on a $e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}} \in \mathbb{R}$, donc $\dfrac{i(p+1)\theta}{2} = k\pi$, d'où $\dfrac{p}{2}\theta = -\dfrac{\theta}{2} + k\pi$, donc $\sin\frac{p\theta}{2} = \pm\sin\frac{\theta}{2}$, d'où $e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}} = \pm\dfrac{1}{p}$ (impossible)**

Problème **Corrigé par Pr Malki.**

1) **les intervalles d'études : $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.**

2) $(E) \iff \frac{d}{dx}((1+x^2)y) = \frac{1}{x} \iff \exists\lambda\in\mathbb{R}, (1+x^2)y = lnx + \lambda \iff \exists\lambda\in\mathbb{R}, y = \frac{lnx+\lambda}{1+x^2}$.
Donc les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{\ln x+\lambda}{1+x^2}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

3) a) **Pour $\alpha > 0$, l'équation $\frac{\ln\alpha+\lambda}{1+\alpha^2} = \beta$ d'inconnue λ a une solution et une seule : $\lambda = (1+\alpha^2)\beta - ln\alpha$.**

b) **(1pt) La fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur ا*+.**

c) **La fonction f_λ vérifiant l'équation différentielle (E), on a :**

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* (1+x^2)f'_\lambda(x) + 2xf_\lambda(x) = \frac{1}{x}$$

Donc pour $x > 0$, $f'_\lambda(x)$ est du signe de $\frac{1}{x} - 2xf_\lambda(x) = \frac{1+x^2-2x^2(\ln x+\lambda)}{x(1+x^2)}$ et le dénominateur est positif. D'où $f'_\lambda(x)$ est du signe de $g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2(\ln x + \lambda)$.

d) **La fonction g_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.**
On a : $\forall \in \mathbb{R}_+^*$ $g'_\lambda(x) = -4x(\ln x + \lambda)$ La fonction g_λ étant strictement croissante sur $]0, e^{-\lambda}]$ avec $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} g_\lambda(x) = 1$, l'équation $g_\lambda(x) = 0$ n'a pas de solution dans cet intervalle.
La restriction de g_λ à $[e^{-\lambda}, +\infty[$ étant continue et strictement décroissante de $[e^{-\lambda}, +\infty[$ dans $]-\infty, 1 + e^{-2\lambda}]$ qui contient 0 admet une seule solution sur cet intervalle, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier.

e) **Les deux questions précédentes donnent le signe de f'_λ sur On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f_\lambda(x) = -\infty$; $f_\lambda(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^2}$. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_\lambda(x) = 0$; $f_\lambda(m_\lambda) = \frac{1}{2m_\lambda^2}$.**

f)

4) a) **Soit $\lambda > 0$ $g_\lambda(\frac{1}{\lambda}) = 1 + \frac{1}{\lambda^2} - 2\frac{\lambda - \ln\lambda}{\lambda^2}$ et $g_\lambda(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) = 1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{2\lambda - ln\lambda}{\lambda}$ $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} g_\lambda(\dfrac{1}{\lambda}) = 1 > 0$ et $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} g_\lambda(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}) = -1 < 0$ d'où**

$$\frac{1}{\lambda} \leq m_\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

b) **L'inégalité précédente donne $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} m_\lambda = 0$ On applique le $\ln$ à l'inégalité $-\ln\lambda \leq \ln(m_\lambda) \leq -\frac{1}{2}\ln\lambda$, on a ainsi $ln(m_\lambda) \longrightarrow 0$ au vois. de $+\infty$ or $g_\lambda(m_\lambda) = 0$ donc $\ln(m_\lambda) + \lambda = \frac{1}{2m_\lambda^2} + \frac{1}{2}$ d'où**

$\lambda \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2m_\lambda^2}$; et alors $m_\lambda \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$; car $m_\lambda > 0$. (N.B $f \sim_a g \Longleftrightarrow \lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 1$).

****

Fin
Bonne chance