CPGE My Youssef, Rabat — **Prépas G.S HighTech, Rabat**

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ عَلَى اللَّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلون
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

DS3 (08-09) commun: *Équations différentielles* *Sous espaces vectoriels*

Lundi 01 Décembre 2008
Durée : 3heures

Citations du jour :
- **Les hommes passent mais leurs oeuvres demeurent.**

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)
- **En mathématiques, nous sommes davantage des serviteurs que des maîtres.**

Charles Hermitte (1822-1901)
- **La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi.**

Albert Einstein (1879-1955)

Mathématiciens du jour : Kronecker
Léopold Kronecker (1823-1891) est un mathématicien et logicien allemand. Il est célèbre pour la citation suivante : "*Dieu fit les nombres naturels ; tout autre est l'oeuvre de l'homme*". Kronecker étend le travail d'Évariste Galois sur la théorie des équations, il résolva l'équation du 5ème degré en appliquant la théorie des groupes à l'aide d'une fonction algébrique à deux variables et confirme le résultat d'Abel sur la non-résolubilité d'une telle équation par radicaux. En analyse, Kronecker rejette la formulation d'une fonction continue partout mais nulle part dérivable de son collègue, Karl Weierstrass. Kronecker s'oppose vigoureusement toute sa vie à la façon dont Georg Cantor mène ses travaux sur l'infini, estimant que la démarche de celui-ci manque de rigueur. On connaît la réponse célèbre de David Hilbert : *Personne ne nous chassera du paradis que Cantor nous a créé.*

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.
- **Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.**
- **L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.**
- **Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.**
- **Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.**
- **Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.**
- **Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.**
- **Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.**
- **Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.**
- **Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.**

PROBLÉME I. **Pr. Haddou Amar, Rabat, Maroc.**

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' - y = \mathrm{e}^t + t$.

b) $y' - 2y = -\mathrm{e}^t + t$.

c) $y' + y = t$.

2) On considère le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & - & y & & & = & -1 \\ -4x & - & 3y & + & 6z & = & 0 \\ -3x & - & 3y & + & 5z & = & 2 \end{array} \right.$$

a) Calculer le rang de $(\mathcal{S})$.
En déduire que sa matrice A est inversible.

3) On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 6 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) En utilisant la méthode Gauss-Jordan, montrer que P et D sont inversibles, et calculer leurs inverses.

b) Vérifier que $PDP^{-1} = A$, en déduire que A est inversible, puis donner son inverse.

c) Résoudre $\mathcal{S}$.

d) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, D^n puis A^n.

4) Soit x, y et z trois fonctions de $t \in \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système différentiel suivant :

$$(\mathcal{S}(t)) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x'(t) = & & & - & y(t) & & & +\mathrm{e}^t \\ y'(t) = & -4x(t) & & - & 3y(t) & + & 6z(t) & \\ z'(t) = & -3x(t) & & - & 3y(t) & + & 5z(t) & +t \end{array} \right.$$

On pose $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

a) Exprimer $u(t), v(t)$ et $w(t)$ en fonction de $x(t), y(t)$ et $z(t)$.

b) En déduire que $u(t), v(t)$ et $w(t)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

d) Montrer que $\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

e) En déduire les expressions de $u(t), v(t)$ et $w(t)$ en fonction de t.

f) Résoudre $(\mathcal{S}(t))$

PROBLÉME II. **Pr. F. Fayard, MPSI, France.**

L'objet de ce problème est d'étudier l'équation différentielle :

$$(E) \quad 2ty'(t) + \sin(y(t)) = 0$$

Cette équation différentielle est résolue sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. On admettra l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour cette équation différentielle, c'est-à -dire que les graphes des solutions de (E) ne se croisent pas sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

1) **Préliminaires**
   a) **Montrer que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t$.**
   b) **Soit (E') l'équation différentielle :**

$$(E') \quad 2ty'(t) + y(t) = 0$$

      i. **Résoudre (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$.**
      ii. **En déduire les solutions de (E') sur $\mathbb{R}$.**
2) **Symétries de (E)**
   a) **Montrer que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $-y$ est aussi solution de (E) sur $\mathbb{R}$.**
   b) **Montrer que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(-t)$ est aussi solution de (E) sur $\mathbb{R}$.**
3) **Solutions sur $\mathbb{R}$**
   a) **Trouver les solutions de (E) qui sont constantes.**
   Le but de cette partie est de démontrer que ce sont les seules solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Dans la suite, on se donne donc une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$
   b) **Montrer que $y(0) \in \pi\mathbb{Z}$.**
   Dans la suite, on se donne un entier k tel que $y(0) = k\pi$
   c) **Dans cette partie, on suppose que k et pair.**
      i. **Montrer que la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(t) - k\pi$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et que $z(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0.**
      Dans la suite, on raisonne par l'absurde et on suppose que z n'est pas la fonction identiquement nulle, c'est à dire qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $z(t_0) \neq 0$. On supposera de plus que $t_0 > 0$ et $z(t_0) > 0$.
      ii. **Montrer que pour tout $t > 0$, on a $z(t) > 0$.**

      Puisque $z(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0, montrer que qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in \left]0, \eta\right] \quad z(t) \leq \frac{\pi}{2}$$

      iii. **En déduire que :**

$$\forall t \in \left]0, \eta\right] \quad 2tz'(t) + \frac{2}{\pi}z(t) \leq 0$$

      iv. **En déduire qu'il existe une constante C strictement positive telle que :**

$$\forall t \in \left]0, \eta\right] \quad z(t) \geq C\frac{1}{t^{\frac{1}{\pi}}}$$

      et aboutir à une contradiction.
      v. **On a suppose plus haut que $t_0 > 0$ et $z(t_0) > 0$. En utilisant les symétries de (E), montrer pourquoi on peut toujours se ramener à ce cas.**
   d) **Dans cette partie, on suppose que k est impair.**

i. Montrer que la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(t) - k\pi$ est solution de (E'') sur $\mathbb{R}$:

$$(E'') \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad 2tz'(t) - \sin(z(t)) = 0$$

Dans la suite, on raisonne par l'absurde et on suppose que z n'est pas la fonction identiquement nulle, c'est à dire qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $z(t_0) \neq 0$. On supposera de plus que $t_0 > 0$ et $z(t_0) > 0$.

ii. Montrer que pour tout $t > 0$, on a $z(t) > 0$.

iii. En déduire que :

$$\forall t > 0 \quad 2tz'(t) - z(t) \leq 0$$

iv. En déduire qu'il existe une constante C strictement positive telle que :

$$\forall t \in]0, \eta] \quad z(t) \geq C\sqrt{t}$$

et aboutir à une contradiction.

v. On a supposé plus haut que $t_0 > 0$ et $z(t_0) > 0$. En utilisant les symétries de (E), montrer pourquoi on peut toujours se ramener à ce cas.

****

Fin
Bonne chance