Devoir Libre 10 : *Espaces vectoriels euclidiens*

A rendre Jeudi 18 Juin 2004

Le probléme est tiré du concours Essec 97 maths 1 Filiére Economie

Dans tout le problème, on considère un nombre entier $p \geq 1$ et, pour tout nombre entier $k \in [0, 2p]$, on note $\mathbb{R}_k[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à k.

Dans la partie I, on munit $\mathbb{R}_{2p}[X]$ d'un produit scalaire permettant d'obtenir un ajustement affine d'une famille de points du plan à l'aide de la méthode des moindres carrés, puis, dans les parties II et III, on utilise ce produit scalaire pour étudier un ajustement polynomial de cette famille de points.

Les parties II et III du problème sont indépendantes de la partie I.

Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{2p}[X]$

On pose pour tout couple (A, B) de polynômes de $\mathbb{R}_{2p}[X]$:

$$< A, B >= \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^{p} A(i)B(i).$$

Prouver que l'application $(A, B) \mapsto < A, B >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{2p}[X]$.

Dans toute la suite du problème, $\mathbb{R}_{2p}[X]$ est muni de ce produit scalaire $< .,. >$, et l'on pose pour tout polynôme A de $\mathbb{R}_{2p}[X]$:

$$\|A\| = \sqrt{< A, A >},\ m(A) =< A, 1 >,\ \Upsilon(A) = \|A - m(A)\|^2,\ \theta(A) = \sqrt{\Upsilon(A)}.$$

Pour tout couple (A, B) de polynômes de $\mathbb{R}_{2p}[X]$, on définit de plus :

$$Cov(A, B) =< A - m(A), B - m(B) > .$$

Propriétés du produit scalaire $< .,. >$

Que vaut $\|1\|$ (norme du polynôme constant égal à 1) ?

Établir, pour tout couple (A, B) de polynômes de $\mathbb{R}_{2p}[X]$, les quatre propriétés :

(1) : $V(A) = \|A\|^2 - [m(A)]^2$

(2) : $\mathrm{Cov}(A, B) =< A, B > -m(A).m(B)$

(3) :$< A, B >= 0$ lorsque A est pair et B impair

(4) :$< XA, B >=< A, XB >$ lorsque A et B sont de degré au plus 2p-1

(XA, XB désignent ici les fonctions polynômes $x \mapsto xA(x)$, $x \mapsto xB(x)$).

Détermination des normes des polynômes X et X^2

Développer $(i + 1)^3$ par la formule du binôme et, en sommant les égalités obtenues pour les entiers i tels que $-p \leq i \leq p$, déterminer $\|X\|^2$.

Développer $(i + 1)^5$ par la formule du binôme et, en procédant de même, montrer que :

$$\|X^2\|^2 = \frac{p(p+1)(3p^2+3p-1)}{15}.$$

Meilleure approximation d'un polynôme par une constante

Prouver, pour tout polynôme A de $\mathbb{R}_{2p}[X]$, que $m(A)$ est la projection orthogonale de A sur $\mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R}$.

En déduire pour toute constante b l'égalité $\|A-b\|^2 = \Upsilon(A) + (m(A)-b)^2$, et montrer que le minimum de $\|A-b\|^2$ lorsque b décrit $\mathbb{R}$ est atteint si et seulement si $b = m(A)$, et que celui-ci est égal à $\Upsilon(A)$.

À quelle condition nécessaire et suffisante sur le degré du polynôme A a-t-on $\Upsilon(A) \neq 0$?

Montrer qu'alors $\left(1, \frac{A-m(A)}{\theta(A)}\right)$ est une base orthonormale du sous-espace vectoriel $(1, A)$ engendré par les polynômes 1 et A.

Meilleure approximation d'un polynôme dans $(1, A)$

On donne des polynômes A, B de $\mathbb{R}_{2p}[X]$, A étant de degré supérieur ou égal à 1, et on cherche des nombres réels a et b minimisant l'expression $\|B - aA - b\|^2$.

On fixe dans cette question le nombre réel a. Montrer que le nombre réel b minimisant l'expression $\|B - aA - b\|^2$ est $b = m(B) - a\,m(A)$.

Pour tout nombre réel a, on note alors

$$f(a) = \|(B - m(B)) - a(A - m(A))\|^2.$$

Exprimer $f(a)$ en fonction de a, de $\Upsilon(A), \Upsilon(B)$ et $\mathrm{Cov}(A, B)$ et, en étudiant les variations de la fonction f, déterminer en fonction de $\Upsilon(A), \Upsilon(B), \mathrm{Cov}(A, B)$ le minimum μ de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que la valeur a_0 de a qui le réalise.

Prouver que μ est le minimum de l'expression $\|B - aA - b\|^2$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Déduire de ces résultats l'inégalité $|\mathrm{Cov}(A, B)| \leq \theta(A)\theta(B)$.

Dans quel cas y-a-t-il égalité dans cette inégalité ?

Application : déterminer en fonction du nombre entier p le minimum de l'expression $\|X^2 - aX - b\|^2$ ainsi que les valeurs de a et b qui le réalisent.

On donne une famille de $2p+1$ points (i, y_i) du plan, où le nombre entier i décrit $-p, p$.

On désigne par k un nombre entier de $[0, 2p]$ et, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_k[X]$, on associe l'expression :

$$\Delta_k(P) = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^{p} (y_i - P(i))^2.$$

On se propose d'établir que $\Delta_k(P)$ admet un minimum noté δ_k et un seul lorsque P décrit $\mathbb{R}_k[X]$, et l'on note alors P_k le polynôme P réalisant ce minimum.

Calcul du minimum δ_{2p}

Établir que l'application F définie de $\mathbb{R}_{2p}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2p+1}$ par :

$$F(P) = (P(-p), P(-(p-1)), \ldots, P(-1), P(0), P(1), \ldots, P(p-1), P(p))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En déduire qu'il existe un et un seul polynôme de $\mathbb{R}_{2p}[X]$, noté Y dans la suite du problème, tel que $Y(i) = y_i$ pour tout nombre entier i tel que $-p \leq i \leq p$.

En déduire la valeur de δ_{2p}.

Existence et unicité de P_k et δ_k Établir, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_k[X]$, que

$$\Delta_k(P) = \|P - Y\|^2.$$

En déduire l'existence et l'unicité du polynôme P_k de $\mathbb{R}_k[X]$ minimisant l'expression $\Delta_k(P)$ lorsque P décrit $\mathbb{R}_k[X]$, autrement dit tel que

$$\delta_k = \|P_k - Y\|^2,$$

et interpréter géométriquement P_k à l'aide de Y et du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$ de l'espace $\mathbb{R}_{2p}[X]$.

Déterminer P_0 et δ_0, puis P_1 et δ_1 en fonction de $p, m(Y), \Upsilon(Y)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Détermination de P_k et δ_k à l'aide d'une base orthogonale

On pose $B_0 = 1$ et, pour tout nombre entier k de $[1, 2p]$, on note B_k la projection orthogonale du polynôme X^k sur la droite de $\mathbb{R}_k[X]$ orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Déterminer le polynôme B_1.

Prouver, pour tout nombre entier k de $[0, 2p]$, que le polynôme B_k est de degré k et unitaire (autrement dit, le coefficient de X^k dans B_k est 1).

Établir ensuite, pour tout nombre entier k de $[0, 2p]$, que la famille $(B_i)_{i\in[0,k]}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$.

En particulier, la famille $(B_i)_{i\in[0,2p]}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_{2p}[X]$.

En exprimant le polynôme Y dans cette base $(B_i)_{i\in[0,2p]}$ et en formant les produits scalaires $< B_i, Y >$, établir que :

$$Y = \sum_{i=0}^{2p} \frac{<B_i,Y>}{\|B_i\|^2} B_i.$$

En déduire, pour tout nombre entier k de $[0, 2p]$:

$$P_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{<B_i,Y>}{\|B_i\|^2} B_i.$$

En déduire, pour $k \in [1, 2p]$, l'expression de P_k en fonction de P_{k-1}, B_k et Y, puis celle de δ_k en fonction de δ_{k-1}, B_k et Y.

Dans cette partie, on se propose de déterminer par récurrence la suite des polynômes B_k définis dans la partie II.

Parité de B_k

On pose, pour $k \in [1, 2p]$: $A_k(X) = (-1)^k B_k(-X)$.

Vérifier que A_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

En déduire que $A_k = B_k$, et que B_k est de même parité que l'entier k.

Expression de XB_k dans la base $((B_k)_{k\in[0,2p]}$

Établir à l'aide de (3) que $< XB_k, B_k >= 0$ pour $k \in [0, 2p - 1]$.

Établir à l'aide de (4) que $< XB_k, B_i >= 0$ pour $k \in [2, 2p - 1]$ $i \in [0, k - 2]$.

En déduire qu'il existe pour tout nombre entier k de $[1, 2p - 1]$ deux nombres réels θ_k, s_k tels que $XB_k = \theta_k B_{k+1} + s_k B_{k-1}$. Que vaut θ_k ?

En remarquant que $XB_{k-1} - B_k$ appartient à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$, montrer que :

$$< XB_{k-1}, B_k >=< B_k, B_k > .$$

En déduire que $s_k = \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2}$, donc que :

$$B_{k+1} = XB_k - \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2} B_{k-1}.$$

À l'aide de ce résultat, expliciter en fonction de l'entier p, supposé supérieur ou égal à 2, les polynômes B_2 et B_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

***

FIN