DS 10 : *Espaces vectoriels euclidiens*

Jeudi 17 Juin 2003

Durée : 3 heures 30 minutes

Préambule :

L'énoncé de cette épreuve comporte 2 pages .
Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation .Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées .
Le probléme est tiré du concours national marocain 2003, filiére PSI.

Définitions et Notations

Dans tout le problème l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels sera noté E et, pour $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n se notera E_n .
Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.
On désigne par Φ l'application de E dans lui même définie par :
$\Phi(P) = (X^2-1)P" + 2XP' = ((X^2-1)P')'$.
Pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on désigne par $V_{p,q}$ le polynôme dérivée q-ième de $(X^2-1)^p$:
$V_{p,q} = [(X^2-1)^p]^{(q)}$. et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $U_k = V_{k,k}$ et $L_k = \dfrac{1}{2^k k!}U_k$.
On peut utiliser le résultat suivant :
- Une matrice carrée triangulaire est inversible si et seulemnt si tous ses termes diagonaux sont non nuls.
- Le rang d'une matrice carrée triangulaire est est égal au nombre de ses termes diagonaux sont non nuls.

$1^{\text{ére}}$ Partie

1. (0.5 pts) .Montrer que Φ est linéaire et induit un endomorphisme Φ_n de E_n .
2. (1.25 pts) .Ecrire la matrice de Φ_n dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ de E_n .
3. (0.75 pts) .Déterminer les valeurs propres de Φ_n .
4. On note $\mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_n$ les valeurs propres de Φ_n, les candidats n'ayant pas pu trouver ces valeurs propres peuvent prendre dans la suite du problème $\mu_k = k(k+1)$.
   (a) (1.5 pts) .Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots n\}$, il existe un unique polynôme unitaire P_k tel que : $\Phi_n(P_k) = \mu_k P_k$.
   (b) (0.75 pts) .Montrer que P_k est de degré k .
5. (0.5 pts) .Montrer que l'application : $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est un produit scalaire sur E .

6. (0.75 pts) .Montrer que, pour tout $(P,Q) \in E^2$: $\quad (\Phi(P)|Q) = (P|\Phi(Q))$.
7. (0.75 pts) .En déduire que , pour tout couple (k,k') d'entiers naturels tel que $k \neq k'$, on a $(P_k|P_{k'}) = 0$.
8. (a) (0.75 pts) .Montrer que, pour tout entier naturel n, la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E_n, puis en construire une base orthonormée $(R_0, R_1, \ldots, R_n)$.
   (b) (1.25 pts) .Calculer $|||\Phi_n||| = \sup\{\|\Phi_n(P)\|; P \in E_n, \|P\| = 1\}$.

2$^{\text{ème}}$ Partie

1. (a) (0.75 pts) .Quel est le degré du polynôme L_k ? Donner son coefficient dominant .
   (b) (1 pt) .Soit $k \in \mathbb{N}$; en partant du fait que $(X^2-1)^k = (X-1)^k(X+1)^k$, et moyennant la formule de Leibniz, calculer $L_k(1)$.
   On pourra remarquer que 1 est une racine de $(X-1)^k$ de multiplicité k.
   (c) (0.5 pts) .Préciser la parité du polynôme L_k en fonction de celle de k .
   (d) (0.25 pts) .En déduire la valeur de $L_k(-1)$.
2. (a) (0.75 pts) .Montrer que si $p > q$ alors $V_{p,q}(1) = V_{p,q}(-1) = 0$.
   (b) (0.5 pts) .Si $q > 2p$, montrer que $V_{p,q} = 0$.
   (c) (1.25 pts) .En effectuant une succession d'intégrations par partie montrer que :
   $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \neq q \implies (U_p|U_q) = 0$.
3. (0.75 pts) .Déduire de ce qui précède que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ est une base orthogonale de E_k .
4. (a) (0.75 pts) .Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$:
   $(XL_n|L_k) = (L_n|XL_k)$ puis en déduire que $(XL_n|L_k) = 0$.
   (b) (1.25 pts) .Donner une base de l'orthogonal de E_{n-2} dans E_{n+1}, puis en déduire que pour tout $n \geq 1$, il existe $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $L_{n+1} = (\alpha_n X + \beta_n)L_n + \gamma_n L_{n-1}$.
5. (a) (0.25 pts) .On pose $W_k = (X^2-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (X^2-1)W_n' = 2nXW_n$.
   (b) (1.5 pts) .En dérivant $(n+1)$-fois l'expression précèdente, à l'aide de la formule de Leibniz, montrer que : $\Phi_n(L_n) = n(n+1)L_n$.
   (c) (1.25 pts)Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $L_n = a_n P_n$, puis calculer a_n .
   On pourra utiliser dans la suite du problème que : $a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.
6. (a) (0.5 pts) .Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, (X|L_k L_k') = 1 - \frac{1}{2}\|L_k\|^2$.
   On pourra penser à une intégration par parties.
   (b) (0.5 pts) .Montrer que : $\forall k \geq 1 \quad XL_k' - kL_k \in E_{k-1}$, puis en déduire que :
   $\forall k \in \mathbb{N}, (XL_k'|L_k) = k\|L_k\|^2$.
   (c) (0.75 pts) .En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\|L_k\|$
   (d) (1.75 pts) .Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)L_{k+1} - (2k+1)XL_k$ est un polynôme de degré $\leq k$, orthogonal à E_{k-2}, puis en déduire que : $(k+1)L_{k+1} = (2k+1)XL_k - kL_{k-1}$.

FIN