ESIM - Session 2000 - Filières PC & PSI

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II - ALGÈBRE - 3 heures

Partie 1

Étude des matrices de Gram

1.a) Pour i fixé, notons $y = x_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j$ et C_j le j^e vecteur colonne de $G(X)$.

Considérons la matrice $G'(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1} \ldots, x_p)\big)$ déduite de la matrice $G(X)$ par l'opération élémentaire $C_i \longleftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j . C_j$.

D'après les propriétés des déterminants, $\det\big(G(X)\big) = \det\big(G'(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1} \ldots, x_p)\big)$.

On a $G'(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1} \ldots, x_p) = \begin{pmatrix} (x_1|x_1) & \ldots & (x_1|y) & \ldots & (x_1|x_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (x_i|x_1) & \ldots & (x_i|y) & \ldots & (x_i|x_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (x_p|x_1) & \ldots & (x_p|y) & \ldots & (x_p|x_p) \end{pmatrix}$.

Notons L'_i la i^e ligne de cette matrice.

L'opération élémentaire $L'_i \longleftarrow L'_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j . L'_j$ transforme $G'(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1} \ldots, x_p)$

en $\begin{pmatrix} (x_1|x_1) & \ldots & (x_1|y) & \ldots & (x_1|x_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (y|x_1) & \ldots & (y|y) & \ldots & (y|x_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (x_p|x_1) & \ldots & (x_p|y) & \ldots & (x_p|x_p) \end{pmatrix}$ qui n'est autre que $G(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1} \ldots, x_p)$.

De plus, l'opération élémentaire précédente ne change pas la valeur du déterminant.

Ainsi $\underline{\det\big(G(X)\big) = \det\Big(G(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j, x_{i+1} \ldots, x_p)\Big)}$.

b) Si X est liée, alors l'un des vecteurs x_i peut s'écrire comme combinaison linéaire des x_j avec $j \neq i$ sous la forme $x_i = \sum_{j \neq i} \mu_j x_j$.

D'après **a)**, $\det\big(G(X)\big) = \det\Big(G(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \sum_{j \neq i} (-\mu_j) x_j, x_{i+1} \ldots, x_p)\Big)$

$= \det\big(G(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0_E, x_{i+1} \ldots, x_p)\big)$ qui est nul car la i^e colonne est nulle.

c) On sait que toute permutation de $\mathcal{S}_p$ peut se décomposer en produit de transpositions. Il suffit donc de montrer que $\forall\, i < j$, $\det\big(G(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j \ldots, x_p)\big) = \det\big(G(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i \ldots, x_p)\big)$, ce qui est immédiat car le deuxième déterminant se déduit du premier par échange des lignes i et j d'une part, des colonnes i et j d'autre part, chaque échange remplaçant un déterminant par son opposé.

Ainsi $\det\big(G(X)\big)$ ne dépend pas de l'ordre de $x_1, \ldots, x_p$.

2.a) Soit $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F. Notons $p_{k\ell}$ le coefficient d'indice (k, ℓ) de $P_B(X)$.

Ainsi $x_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} p_{ki}\, e_k$ et $x_j = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{p} p_{\ell j}\, e_\ell$.

Puisque B est une base orthonormée de F, $\big(x_i \big| x_j\big) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} p_{ki} p_{kj} = \sum_{k=1}^{p} p'_{ik} p_{kj}$ qui est le coefficient d'indice (i, j) du produit matriciel ${}^t P_B(X).P_B(X)$.

Donc $\underline{G(X) = {}^t P_B(X).P_B(X)}$.

Remarque importante :

en notant r le rang de X $(r \leq p)$, alors $\dim F = r$ et $P_B(X)$ est donc une matrice rectangulaire de $M_{r,p}(\mathbf{R})$.

b) $G(X)$ est symétrique positive : en effet $\forall\, Y \in M_{p,1}(\mathbf{R})$, ${}^t Y\, G(X)\, Y = {}^t Z\, Z \geq 0$ avec $Z = P_B(X)\, Y$.

On sait qu'alors $G(X)$ admet p valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, (distinctes ou non) positives,

donc $\det\big(G(X)\big) = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} \lambda_i \geq 0$.

Si X est libre, alors le rang r de X est égal à p : dans ce cas $P_B(X)$ est une matrice carrée inversible,

donc $\det\big(G(X)\big) = \det\big({}^t\, P_B(X)\big).\det\big(P_B(X)\big) = \Big(\det\big(P_B(X)\big)\Big)^2 > 0$.

3.a) Contraposons en montrant que la famille $(x_1, \ldots, x_q)$ est liée dans E si et seulement si la famille $(C_1, \ldots, C_q)$ est liée dans $M_{p,1}(\mathbf{R})$.

- Supposons que $(x_1, \ldots, x_q)$ soit liée : alors un des x_i peut s'écrire comme combinaison linéaire des x_j pour $j \neq i$ de la forme $x_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{q} \lambda_j x_j$.

$$\text{Alors } C_i = \begin{pmatrix} (x_1|x_i) \\ \vdots \\ (x_k|x_i) \\ \vdots \\ (x_p|x_i) \end{pmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{q} \lambda_j \begin{pmatrix} (x_1|x_j) \\ \vdots \\ (x_k|x_j) \\ \vdots \\ (x_p|x_j) \end{pmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{q} \lambda_j.C_j, \quad \text{donc } \underline{(C_1, \ldots, C_q) \text{ est liée.}}$$

- Supposons que $(C_1, \ldots, C_q)$ soit liée : alors un des C_i peut s'exprimer comme combinaison linéaire des C_j pour $j \neq i$ de la forme $C_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{q} \lambda_j.C_j$, ce qui donne en identifiant les termes de chaque ligne :

$$\forall\, k = 1 \ldots p,\ \big(x_k \big| x_i\big) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{q} \lambda_j \big(x_k \big| x_j\big), \text{ donc } \forall\, k = 1 \ldots p,\ \Big(x_k \Big| x_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{q} \lambda_j x_j\Big) = 0.$$

Le vecteur $y = x_i - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{q} \lambda_j x_j$ est élément de F et orthogonal à tous les éléments d'une famille génératrice de F : il est donc nul, d'où $x_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{q} \lambda_j x_j$, donc $\underline{(x_1, \ldots, x_q) \text{ est liée.}}$

b) Notons r le rang de la famille X.

Alors il existe r vecteurs de X linéairement indépendants et tout système qui a plus de r éléments de X est lié.

Donc il existe r colonnes de $G(X)$ linéairement indépendants et tout système qui a plus de r colonnes est lié, donc le rang de $G(X)$ est égal au rang r de X.

Partie 2

On suppose dans cette partie que X est une famille libre.
Pour $i \in [\![1; p-1]\!]$, on note F_i l'espace engendré par $(x_1, \dots, x_i)$ et p_i la projection orthogonale sur F_i.
On pose $u_1 = x_1$ et pour i entre 1 et $p-1$, $u_{i+1} = x_{i+1} - p_i(x_{i+1})$.

1.a) Montrons que $\forall\, x \in F_{i+1},\ u = x - p_i(x)$ est la projection orthogonale de x sur $F_{i+1} \cap F_i^{\perp}$.
D'après la caractérisation de la projection orthogonale, il suffit de montrer que :

$$i)\ \ u \in F_{i+1} \cap F_i^{\perp} \qquad ii)\ \ x - u \in \left(F_{i+1} \cap F_i^{\perp}\right)^{\perp}.$$

i) $p_i(x) \in F_i \subset F_{i+1}$ et $x \in F_{i+1}$, donc $\underline{u \in F_{i+1}}$.
D'autre part, par définition de p_i, $\underline{u \in F_i^{\perp}}$.

ii) $F_{i+1} \cap F_i^{\perp} \subset F_i^{\perp}$, donc $F_i = (F_i^{\perp})^{\perp} \subset \left(F_{i+1} \cap F_i^{\perp}\right)^{\perp}$, d'où $x - u = p_i(x) \in F_i \subset \left(F_{i+1} \cap F_i^{\perp}\right)^{\perp}$.
En particulier, u_{i+1} est la projection orthogonale de x_{i+1} sur $F_{i+1} \cap F_i^{\perp}$.

b) Comme $u_{i+1} \in F_i^{\perp}$ et $\forall\, k = 1 \dots i,\ u_k \in F_k \subset F_i$, alors $\left(u_{i+1} \middle| u_k\right) = 0$.
Il en résulte que <u>la famille $U = (u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale</u>.

<u>Remarque</u> : il s'agit en fait de la famille déduite de X par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Montrons qu'<u>aucun des u_i n'est nul</u>.
- C'est évident pour $u_1 = x_1$.
- Si l'un des u_j était nul pour $j \geq 2$, alors on aurait $x_j = p_{j-1}(x_j) \in F_{j-1}$, donc x_j s'exprimerait comme combinaison linéaire des éléments $x_1, \dots, x_{j-1}$, ce qui contredit que <u>X est libre</u>.

Il en résulte immédiatement que $B_1 = \left(\dfrac{u_i}{\|u_i\|}\right)_{i \in [\![1;p]\!]}$ est une base orthonormée de F.

2. Notons $y_{i+1} = p_i(x_{i+1})$: ainsi $x_{i+1} = y_{i+1} + u_{i+1}$ avec $y_{i+1} \perp u_{i+1}$, donc $\left(x_{i+1} \middle| u_{i+1}\right) = \left(u_{i+1} \middle| u_{i+1}\right) = \left\|u_{i+1}\right\|^2 > 0$.
D'autre part, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left|\left(x_{i+1} \middle| u_{i+1}\right)\right| \leq \|x_{i+1}\|\,\|u_{i+1}\|$.

Ainsi $0 < \dfrac{\left(x_{i+1} \middle| u_{i+1}\right)}{\|x_{i+1}\|\,\|u_{i+1}\|} \leq 1$.

Or la fonction cos induit une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $]0, 1]$, donc il existe un unique réel $\alpha_i \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos(\alpha_i) = \dfrac{\left(x_{i+1} \middle| u_{i+1}\right)}{\|x_{i+1}\|.\|u_{i+1}\|}$.

3. B_1 étant une base orthonormale de F, d'après **1-2.a)**, $G(X) = {}^tP_{B_1}(X)\, P_{B_1}(X)$, donc $\det\left(G(X)\right) = \det\left(P_{B_1}(X)\right)^2$.
Or $P_{B_1}(X)$ est <u>triangulaire supérieure</u>. Comme $x_1 = u_1$, alors $p_{11} = \|u_1\|$ et pour $i \geq 2$, p_{ii} est égal à la i^e composante de x_i dans la base B_1, c'est donc $\left(x_i \middle| \dfrac{u_i}{\|u_i\|}\right) = \dfrac{\left(x_i \middle| u_i\right)}{\|u_i\|} = \|x_i\| \cos(\alpha_{i-1})$.

Ainsi $\det\left(G(X)\right) = \|u_1\|^2 \displaystyle\prod_{i=2}^{p} \|u_i\|^2 = \prod_{i=1}^{p} \|x_i\|^2 . \prod_{j=1}^{p-1} \cos^2(\alpha_j)$.

L'inégalité $\det\left(G(X)\right) \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{p} \|x_i\|^2$ est alors évidente.

Le cas d'égalité est celui où $\forall\, j = 1 \dots p-1,\ \cos^2(\alpha_j) = 1$, c'est à dire $\left|\cos(\alpha_j)\right| = 1$, soit encore $\left|\left(x_{j+1} \middle| u_{j+1}\right)\right| = \|u_{j+1}\|\,\|x_{j+1}\|$ qui représente le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz et a lieu si et seulement si u_{j+1} est colinéaire à x_{j+1}, c'est à dire <u>si X est orthogonale</u>.
D'ailleurs dans ce cas $G(X) = \mathrm{Diag}(\|x_1\|^2, \dots, \|x_p\|^2)$.

Partie 3

Produit vectoriel de $n-1$ vecteurs en dimension n

1. L'égalité demandée est évidente si $x \in F$ car alors $d(x,F)=0$ et $\det\big(G(x,x_1,\dots,x_p)\big)=0$ (famille liée).

Supposons maintenant que $x \notin F$: alors $(x_1,\dots,x_p,x)$ est libre et, d'après **1-1.c)**, $\det\big(G(x,x_1,\dots,x_p)\big)=\det\big(G(x_1,\dots,x_p,x)\big)$.

On construit par orthogonalisation une famille orthogonale $U'=(u_1,\dots,u_p,u)$ à partir de $(x_1,\dots,x_p,x)$ libre, les u_i étant les mêmes que dans U, donc les les α_i aussi.

En rajoutant $\alpha \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos(\alpha)=\dfrac{(x|u_p)}{\|x\|\,\|u_p\|}$, on obtient de même que :

$$\det\big(G(x,x_1,\dots,x_p)\big)=\|x\|^2\cos^2(\alpha)\prod_{i=1}^{p}\|x_i\|^2.\prod_{j=1}^{p-1}\cos^2(\alpha_j)=\|x\|^2\cos^2(\alpha)\det\big(G(x_1,\dots,x_p)\big)$$
$$=\|u\|^2\det\big(G(x,x_1,\dots,x_p)\big)\quad(\text{car comme au } \mathbf{2\text{-}3},\ \|u\|=\|x\|\cos\alpha.$$

Or $u=x-P_F(x)$ est la projection orthogonale de x sur $F^\perp$, donc $\|u\|=d'x,F)$.

$$\text{Ainsi}\quad d(x,F)^2=\frac{\det\big(G(x,x_1,\dots,x_p)\big)}{\det\big(G(x_1,\dots,x_p)\big)}.$$

2. On sait que $\|x_1\wedge x_2\|^2=\|x_1\|^2\,\|x_2\|^2\sin^2\alpha$ avec $\cos\alpha=\dfrac{(x_1|x_2)}{\|x_1\|\,\|x_2\|}$.

$$\text{Or } G(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}(x_1|x_1) & (x_1|x_2)\\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2)\end{vmatrix}=\|x_1\|^2\,\|x_2\|^2-(x_1|x_2)^2=\|x_1\|^2\,\|x_2\|^2-\|x_1\|^2\,\|x_2\|^2\cos^2\alpha$$
$$=\|x_1\|^2\,\|x_2\|^2\sin^2\alpha.$$

Donc $\underline{\|x_1\wedge x_2\|^2=G(x_1,x_2)}$.

3.a) $\dim E^*=\dim E=n$..

b) Pour chaque $x\in E$, l'application $\theta(x) : y \longmapsto (x|y)$ est linéaire de E vers $\mathbf{R}$, donc $\theta(x)\in E^*$.

$\theta : \underset{E}{x} \longmapsto \underset{E^*}{\theta(x)}$ est <u>linéaire</u> car $\forall y\in E,\ \theta(\lambda x_1+x_2)(y)=(\lambda x_1+x_2|y)=\lambda\,(x_1|y)+(x_2|y)=\lambda\,\theta(x_1)(y)+\theta(x_2)(y)$, donc $\theta(\lambda x_1+x_2)=\lambda\,\theta(x_1)+\theta(x_2)$.

<u>θ est injective</u> car si $x\in\mathrm{Ker}\theta$, alors $\theta(x)=0_{E^*}$, d'où $\theta(x)(x)=\|x\|^2=0$, donc $x=0_E$.

Comme $\dim E=\dim E^*$, θ est un <u>isomorphisme</u> de E sur E^* (appelé isomorphisme canonique).

<u>Conséquence</u> : $\underline{\forall\varphi\in E^*,\ \exists!\,z\in E\ /\ \forall y\in E,\ \varphi(y)=\theta(z)(y)=(z|y)}$.

c) Soit B une base orthonormée directe de E.

$\varphi : y \longmapsto \det\big(P_B(x_1,\dots,x_{n-1},y)\big)$ est une <u>forme linéaire sur E</u> car $y\longrightarrow P_B(x_{,1},\dots,x_{n-1},y)$ est linéaire et le déterminant est linéaire par rapport à sa dernière colonne.

Il suffit d'appliquer le **b)** pour déduire l'existence et l'unicité de z tel que :
$$\forall y\in E,\ \det\big(P_B(x_1,\dots,x_{n-1},y)\big)=(z|y).$$

4. <u>Si X est une famille liée</u>, alors $P_B(x_1,\dots,x_{n-1},y)$ n'est pas inversible car ses $n-1$ premières colonnes sont liées, d'où $\forall y\in E,\ (z|y)=\det\big(P_B(x_1,\dots,x_{n-1},y)\big)=0$. En particulier pour $y=z$, on trouve $\underline{v(X)=z=0_E}$.

<u>Si X est une famille libre</u>, alors X est une base de F qui est donc de dimension $n-1$ En prenant y non nul de $F^\perp$ qui est une droite, alors $(x_1,\dots,x_{n-1},y)$ est une base de $F\oplus F^\perp=E$, donc $\det\big(P_B(x_1,\dots,x_{n-1},y)\big)\neq 0$, donc $(z|y)\neq 0$, d'où $\underline{v(X)=z\neq 0_E}$.

5. Pour montrer que $v(X)$ appartient à $F^\perp$, il suffit de montrer que $v(X)$ est orthogonal à tous les éléments de X, c'est à dire : $\forall\, i = 1 \dots n-1,\ \big(z\big|x_i\big) = 0$.

En effet : $\big(z\big|x_i\big) = \det\big(P_B(x_1,\dots,x_{n-1},x_i)\big) = 0$ (deux colonnes égales).

Si X est libre, alors $v(X) \neq 0_E$ et on a : $\det\big(P_B(x_1,\dots,x_{n-1},v(X))\big) = \big(v(X)\big|v(X)\big) = \|v(X)\|^2 > 0$, ce qui prouve à la fois que $\big(x_1,\dots,x_{n-1},v(X)\big)$ est une <u>base</u> de E et qu'elle est <u>directe</u> car de même sens que B elle-même directe.

Soit $y \in E = F \oplus F^\perp$: y se décompose en $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in F$ et $y_2 \in F^\perp$; y_1 (resp. y_2) est la projection orthogonale de y sur F (resp. $F^\perp$).
Comme $\dim F = n-1$ car X est supposée libre, $\dim F^\perp = 1$, donc $v(X)$ (non nul) engendre la droite $H^\perp$.
On sait qu'alors $y_2 = \dfrac{\big(v(X)\big|y\big)}{\big(v(X)\big|v(X)\big)}.v(X)$ et $y_1 = y - y_2$.

6. D'après la question **1-2)** , $G(X) = {}^tP_A(X)\,P_A(X)$ où $A = (e_1,\dots,e_{n-1})$ désigne une base orthonormée de F (de dimension $n-1$ car X est libre).
Donc $\det\big(G(X)\big) = \det\big(P_A(X)\big)^2$.
Posons $w = \dfrac{v(X)}{\|v(X)\|}$: w est normé et est colinéaire à $v(X)$, donc est dans $F^\perp$; alors $B = (e_1,\dots,e_{n-1},w)$ est une base orthonormée de E.
$P_B(x_1,\dots,x_{n-1},w) = \begin{pmatrix} P_A(X) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\det\big(P_B(x_1,\dots,x_{n-1},w)\big) = \det\big(P_A(X)\big)$.

Or d'autre part, $\det\big(P_B(x_1,\dots,x_{n-1},w)\big) = \big(v(X)\big|w\big) = \dfrac{\big(v(X)\big|v(X)\big)}{\|v(X)\|} = \|v(X)\|$.

Ainsi $\underline{\|v(X)\|^2 = \det\big(G(x_1,\dots,x_{n-1})\big)}$.

<u>Remarque</u> : cette solution n'utilise pas la question **1-3.5)**.
