MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Devoir Surveillé N°9

Mardi le:13-Mai-2003

Programme : Espaces Vectoriels Euclidiens
Durée : 4 heures

Exercice 1 : $\forall(P,Q) \in IR_2[X]$ on pose $\langle P,Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$

1. (0.25)Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire
2. (0.5)On pose $F = Vect(X^2+1+X, X^2-X-2)$ donner une b.o.n. de F
3. (0.75)Donner la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base $(1,X,X^2)$
4. (0.75)calculer $d(1+X^2,F)$

Exercice 2 : (0.75) Reconnaitre l'endomorphisme de IR^3 dont la matrice dans la base canonique est $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : Soit r la rotation de l'espace d'axe orienté par $\vec{u}$ unitaire et d'angle θ et R celle d'axe orienté par $\vec{v}$ unitaire et d'angle φ,on se propose de reconnaitre $roRor^{-1}$

1. (0.75)Montrer que r et R conservent le produit vectoriel
2. (0.5)Montrer que $roRor^{-1}$ est aussi une rotation , sans determiner ni son axe ni son angle.
3. (0.25)Montrer que $r(\vec{v})$ est invariant par $roRor^{-1}$, en deduire l'axe de $roRor^{-1}$,soit α l'angle de $roRor^{-1}$
4. (0.5)on suppose $\vec{u} = \vec{v}$, montrer que $\alpha = \varphi$
5. on suppose $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$
   a. (0.5)Montrer que si $\langle \vec{x}, r(\vec{v})\rangle = 0$ alors : $roRor^{-1}(\vec{x}) = \cos(\varphi)\vec{x} + \sin(\varphi)\, r(\vec{v}) \wedge \vec{x}$
   b. (0.5)Montrer que si $\langle \vec{x}, r(\vec{v})\rangle = 0$ alors : $roRor^{-1}(\vec{x}) = \cos(\alpha)\vec{x} + \sin(\alpha)\, r(\vec{v}) \wedge \vec{x}$
   c. (0.5)En deduire que : $\alpha = \varphi$
6. Conclure

Probléme 1 :

Le but de ce problème est la recherche des matrices carrées d'ordre 2 et 3 orthogonales à coefficients rationnels On désigne par $M_n(IR)$ (respectivement $M_n(Q)$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n a coefficients réels (respectivement rationnels), et par $O_n(IR)$ (respactivement $O_n(Q)$) celui des matrices carrées d'ordre n orthogonales a coefficients réels (respectivemnt rationnels)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,$A \in O_2(IR)$.

1. (0.75)montrer que : $A \in O_2(IR) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1 \\ ac+bd = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a^2+c^2 = b^2+d^2 = 1 \\ ab+cd = 0 \end{cases}$$

2. (1pt)Démontrer que :$A \in O_2(IR) \Leftrightarrow \exists\varphi \in [0,2\pi[$ tel que : $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$Quelles sont les significations géométriques respectives des 2 endomorphismes associés ?
3. (0.25)Démontrer que si $A \in O_2(IR)$, $\exists t \in IR$ tel que $A = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & -\frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix}$, ou $A = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & -\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix}$.On admettra que t puisse prendre des valeurs infinies.
4. (0.75)Montrer que $A \in O_2(Q) \Leftrightarrow t \in Q$

Soit $A \in M_3(IR)$. On suppose désormais que $A \in O_3(IR)$

5. (0.25)Quelles sont les valeurs possibles de $det(A)$?
   On suppose que $det(A) = 1$.
6. (0.5) Soit λ valeur propre de A. montrer que $\lambda \in IR$
7. (0.75)Montrer que $\lambda = 1$ est valeur propre de A d'ordre 1 ou 3; c-a-d:1 racine de simple ou triple de l'equation : $\det(A-\lambda I_3) = 0$
   On appelle $E_1 = Ker(A-I_3)$ l'espace propre associé a $\lambda = 1$.
8. (0.5) Montrer que $dimE_1 = 1$ ou que $dimE_1 = 3$
9. (0.75) Dans le cas $dimE_1 = 1$, montrer que A est semblable a $A' = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c-a-d : $\exists P \in Gl_3(IR)$ tel que :$A = PA'P^{-1}$, Quelle est la signification géométrique de l'endomorphisme associé a A'?
10. (1.25)Déduire de l'étude précédente des résultats analogues pour la cas $det(A) = -1$.
11. (0.75)Montrer que dans ce cas, A est semblable a la matrice $A' = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .Quelle interprétation géométrique peut-on en donner?
12. *Application numérique*.Caractériser les endomorphismes définis par:$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$,$B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Probléme 2 :

Introduction: Dans tout ce problème, E désigne l'espace ou le plan vectoriel euclidien de dimension finie $n = 2$ ou 3 . On notera $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et $\|\vec{u}\|$ la norme issue de ce produit scalaire.$O(E)$ est le groupe orthogonal de E, ses éléments sont les isométries de E. Si H est un hyperplan de E, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, on appelle réflexion d'hyperplan H la symétrie orthogonale par rapport à H. Elle est entièrement déterminée par H.Si F est un sous-espace vectoriel de E, lorthogonal de F est le sous-espace vectoriel noté $F^{\perp}$ de E défini par :$F^{\perp} = \left\{\vec{y} \in E : \forall \vec{x} \in F, \left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = 0\right\}$,il a pour dimension $n - dimF$.Si $f_1, f_2, ..., f_p$ sont des isométries, on note gr $< f_1, f_2, ..., f_p >$ le plus petit sous-groupe,au sens de l'inclusion, du groupe orthogonal qui contient $f_1, f_2, ..., f_p$. On dit que c'est le groupe engendré par $f_1, f_2, ..., f_p$.Le but de ce problème est une étude des groupes d'isométries qui sont finis et qui sont engendrés par des réflexions. Ces groupes sont appelés groupes de *Coxeter*.

Le cas commutatif

1. (0.75) Donner les valeurs propres possibles d'une reflexion ainsi que les vecteurs propres associés.
2. (0.75)Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul orthogonal à H. Démontrer que la réflexion s d'hyperplan H est définie par :$s\left(\vec{x}\right) = \vec{x} - 2\frac{\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}\vec{u}$
3. (0.5)Soit g une isométrie quelconque et s une réflexion d'hyperplan H, démontrer que $gosog^{-1}$ est une réflexion. Quel est son hyperplan?
4. (0.75)On dit que deux hyperplans sont perpendiculaires si l'un contient l'orthogonal de l'autre.Ils sont donc distincts. Soient k hyperplans $H_1, H_2, ..., H_k$ deux à deux perpendiculaires et $u_1, u_2, ..., u_k$ des vecteurs non nuls tels que, pour tout i , u_i est orthogonal à H_i. Montrer que les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_k$ sont orthogonaux. En déduire que $k \leq n$.
5. (0.5)Démontrer que deux réflexions commutent si et seulement si elles sont identiques ou si l'hyperplan de l'une est perpendiculaire à l'hyperplan de l'autre.
6. (0.75)En déduire tous les groupes de *Coxeter* commutatifs lorsque $n = 3$. On montrera qu'ils sont engendrés par une, deux ou trois réflexions, et on décrira chacun des groupes obtenus (par exemple à l'aide de matrices).

   Le cas de la dimension 2 : On suppose dans cette partie que $n = 2$, et que $E = IR^2$ est muni dune structure d'espace vectoriel euclidien orienté. Les hyperplans sont alors les droites vectorielles D : dans ce cas, on parlera d'une réflexion d'axe D.Soit G un groupe de *Coxeter* engendré par deux réflexions s_1 et s_2 daxes respectifs D_1 et D_2 distincts; on choisit deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_1}$ sur D_1 et $\overrightarrow{u_2}$ sur D_2. Soit alors $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base orthonormée directe telle que $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_1}$; on appelle θ le réel de $]0, 2\pi[$ tel que: $\overrightarrow{u_2} = \cos(\theta)\overrightarrow{e_1} + \sin(\theta)\overrightarrow{e_2}$
7. (0.5) Donner les matrices de s_1 et de s_2 dans cette base.
8. (0.5) Démontrer que s_2os_1 est la rotation r dangle de mesure 2θ.
9. (0.75) Démontrer que le groupe engendré par une rotation d'angle de mesure 2θ est fini si, et seulement si, il existe p, m entiers premiers entre eux tels que $\theta = \frac{p\pi}{m}$
10. (0.75) On suppose maintenant que $\theta = \frac{p\pi}{m}$ où les entiers p et m sont premiers entre eux. Démontrer que:$s_2 = ros_1, s_1or^kos_1 = r^{m-k}$ pour $k \in \{0, 1..., m-1\}$
11. (0.75) En déduire que G coïncide avec l'ensemble $G\prime = \{id, r, r^2, ..., r^{m-1}, s_1, ros, r^2os_1, ..., r^{m-1}os_1\}$.On vérifiera en particulier que les eléments de G sont bien distincts et que G est un groupe.
12. (0.75) Démontrer que G contient m réflexions. Préciser les axes de ces réflexions lorsque $m = 6$.