بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé Contrôle (07-08) : *Espaces euclidiens*

Exercice 1 .

1) *a) $\Longrightarrow$ b) : Utiliser le fait que $< f(x)+f(y), x+y >=< f(x+y), x+y >= 0$ que $< f(x), x >=< f(y), y >= 0$.*
b) $\Longrightarrow$ c) Utiliser le résultat du cours qui dit que si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une b.o.n et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})$, alors $a_{i,j} =< f(e_j), e_i >$.
c) $\Longrightarrow$ a) : En utilisant encore une fois le résultat $a_{i,j} =< f(e_j), e_i >$, et comme A est antisymétrique, alors $a_{i,i} =< f(e_i), e_i >= 0$, donc la relation $< f(x), x >= 0$ est vraie sur la base et par linéarité elle le sera sur tout l'espace.

2) *a) et b) $\Longrightarrow$ c : Notons d'abord que $\|f^2(x)\| = \|f(x)\| = \|x\|$ et que $< f^2(x), x >= -< f(x), f(x) >= -\|f(x)\|^2 = -\|x\|^2$, donc $\|f^2(x)+x\|^2 = \|f^2(x)\|^2 + 2 < f^2(x), x > + \|x\|^2 = 0$, d'où $f^2(x)+x = 0$.*
a) et c) $\Longrightarrow$ b : D'aprés b) de la question précédente on a $\|f(x)\|^2 =< f(x), f(x) >= -< x, f^2(x) >=< x, x >= \|x\|^2$.
b) et c) $\Longrightarrow$ a) : D'aprés un résultat de cours toute application linéaire qui conserve la norme, conserve aussi le produit scalaire, donc $< x, f(x) >= -< f^2(x), f(x) >= -< f(x), x >$, d'où $< f(x), x >= 0$.
Montrons maintenant que la relation $(x|y) =< x, y > + < f(x), f(y) >$ définit un produit scalaire sur E. La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont évidentes.
Definie : Supposons que $(x|x) = 0$, donc $\|x\|^2 + \|f(x)\|^2 = 0$, donc $\|x\|^2 = 0$ et par suite $x = 0$.

Exercice 2 .

1) *Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ avec $x_k = k, y_k = \sqrt{k}$ et les relations $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$*

2) *On sait que l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient égalité, lorsque les coéfficients sont proportionnels, donc $k = \lambda\sqrt{k}, \forall 1 \leq k \leq n$, donc $\lambda = 1$, d'où $k = \sqrt{k}, \forall 1 \leq k \leq n$, donc $n = 1$.*

Exercice 3 . Les colonnes de A et B forment une b.o.n. avec $\det A = \det B = 0$. Les résolutions des équations $AX = X$ et $BX = X$ montrent que A est la matrice de la réflexion (symétrie orthogonale) par rapport la droite Δ d'équation $\Delta : x - y = 0$ et B est la matrice de la réflexion par rapport au plan π d'équation $\pi : 3x - 2y + z = 0$

Fin