بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

Contrôle (07-08) : *Espaces euclidiens*

Lundi 28 Avril 2008.

<u>Durée</u> : 1heure

Exercice 1 . *Soit* $(E, <,>)$ *un espace euclidien,* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ *où* $\mathcal{B}$ *b.o.n de* E.

1) *Montrer que les propriétés suivantes sont équivalents :*
- *a)* $< x, f(x) >= 0 \ , \forall x \in E$.
- *b)* $< f(x), y >= - < x, f(y) >, \ \forall x, y \in E$.
- *c)* ${}^tA = -A$.

2) *Montrer que deux parmi les propriétés suivantes impliquent la troisième.*
- *a)* $< x, f(x) >= 0 \ , \forall x \in E$.
- *b)* $\|f(x)\| = \|x\|, \ \forall x \in E$.
- *c)* $f^2 = -id_E$. *(anti-involutive ou antisymetrique).*
  Et que dans ce cas la relation $(x|y) =< x, y > + < f(x), f(y) >$ *définit un produit scalaire sur* E.

Exercice 2 .

1) *Montrer que* $\forall n \geq 1$, *on a :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

2) *Á quelle condition sur* n *on peut avoir égalité ?*

Exercice 3 . *Reconnaitre les endormorphismes ayant dans une b.o.n les matrices suivantes :*

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Fin