MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Controle N°9

Jeudi le:29-Mai-2003

Programme:Géometrie euclidienne

Durée : 2h

1. Reconnaître les applications affines dont l'expression analytique dans le repère canonique est :
   - **a**. (0.5) $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 2 \end{cases}$
   - **b**. (0.5) $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$
   - **c**. (0.75) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. Soient D_1 et D_2 les droites de IR^3 d'équations respectives
   $D_1 : \begin{cases} -2x + 3y + z = 2 \\ x + y - z = -1 \end{cases}, D_2 : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$
   - **a**. (0.25) Donner $\vec{u}$ un vecteur orthogonal a la fois a D_1 et D_2.
   - **b**. (0.25) Donner l'équation du plan π_1 contenant D_1 tel que $\vec{u} // \pi_1$.
   - **c**. (0.25) Donner l'équation du plan π_2 contenant D_2 tel que $\vec{u} // \pi_2$.
   - **d**. (0.25) Vérifier que la droite $D = \pi_1 \cap \pi_2$ est perpendiculaire commune a D_1 et D_2.
   - **e**. (0.25) En déduire $d(D_1, D_2)$.
3. (0.5) Soit M$\in$ IR^3, Δ une droite passant par un point A dirigée par un vecteur $\vec{u}$ montrer que $d(M,\Delta) = \frac{\left\| \overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} \right\|}{\| \vec{u} \|}$
4. Reconnaître les équipotentielle de IR^3 définie par :
   - **a**. (0.75) $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{u}$ où A, B deux points et $\vec{u}$ vecteur de IR^3 fixes.
   - **b**. (0.25) *Application numérique* : $A(1,2,-1), B(1,0,1), \vec{u}(2,1,1)$
   - **c**. (1pt) $\left\| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} \right\|$ où A, B, C, D, E 5 points de l'espace et k réel donné
5. ..
   - **a**. (0.5) Soit (γ) cercle du plan M un point et Δ une droite passant par M coupant (γ) en A et B , montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = C^{te}$ qui ne depond pas du choix de Δ, on appelle cette constante puissance de M par rapport a (γ) et on la note $P_{(\gamma)}(M)$
   - **b**. Reconnaitre les ensembles:
     - **i**. (0.25) $\{M \in IR^2 / P_{(\gamma)}(M) > 0\}$
     - **ii**. (0.25) $\{M \in IR^2 / P_{(\gamma)}(M) = 0\}$
     - **iii**. (0.25) $\{M \in IR^2 / P_{(\gamma)}(M) < 0\}$
   - **c**. Soit $(\gamma), (\gamma')$ deux cercles de centre respectifs Ω, Ω' et de rayons respectifs R et R' ; on dit qu'ils sont orthogonaux ssi $\Omega\Omega'^2 = R^2 + R'^2$, montrer dans ce cas que:

- **i**. (0.25) $(\gamma) \cap (\gamma') \neq \emptyset$
- **ii**. (0.25) si $A \in (\gamma) \cap (\gamma')$ alors $\widehat{\Omega A \Omega'} = \frac{\pi}{2}$

d. (0.25) Si $(\gamma) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, (\gamma') : x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$ montrer que $(\gamma), (\gamma')$ sont orthogonaux ssi $2(aa' + bb') = c + c'$

e. (0.25) Soit $(\gamma) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ un cercle ; $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ deux points distincts , on dit qu'ils sont conjugués ssi le cercle de diamétre $[M_1, M_2]$ est orthogonal a (γ) , montrer alors que : $x_1x_2 + y_1y_2 - a(x_1 + x_2) - b(y_1 + y_2) + c = 0$

f. (0.5) Soit $M \in IR^2$, (γ) un cercle de centre $\Omega \neq M$ montrer que l'ensemble des conjugués de M par rapport a (γ) est une droite $\Delta \perp \overrightarrow{\Omega M}$, Δ s'appelle polaire de M et M pole de Δ par rapport a (γ)

g. (0.25) Si $M(x_0, y_0)$ et $(\gamma) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ donner l'equation de Δ

h. Soit (γ) cercle de centre Ω et de rayon R passant par l'origine ;
$\Delta : x = a; \theta = \left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{O\Omega}}\right)$

- **i**. (0.5) Donner l'equation de (γ) en fonction de R et θ
- **ii**. (0.25) Soit $M(x_0, y_0)$ donner l'equation de la polaire de M par rapport a (γ)
- **iii**. (0.5) En deduire une CNS pour que M soit pole de Δ par rapport a (γ)

6. Soit $A(1,0,1), B(2,1,2), D = (AB), \pi$ plan perpendiculaire a D passant par A

a. (0.5) Donner l'expression analytique de la projection orthogonale sur D

b. (0.5) Donner l'expression analytique de la projection orthogonale sur π

c. (0.75) Donner l'expression analytique de la rotation d'axe D d'angle $\frac{2\pi}{3}$

d. (0.5) Soit $C(-1,1,-1)$ donner l'equation cartesienne de $r_{D,\frac{2\pi}{3}}(AC)$ puis donner les angles entre D et (AC) puis D et $r_{D,\frac{2\pi}{3}}(AC)$