

Controle N°9

Jeudi le: 29-Mai-2003

Programme: Géométrie euclidienne

Durée : 2h

1. Reconnaître les applications affines dont l'expression analytique dans le repère canonique est :

a. (0.5)
$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 2 \end{cases}$$

b. (0.5)
$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$$

c. (0.75)
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Soient D_1 et D_2 les droites de \mathbb{R}^3 d'équations respectives

$$D_1 : \begin{cases} -2x + 3y + z = 2 \\ x + y - z = -1 \end{cases}, D_2 : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

- a. (0.25) Donner \vec{u} un vecteur orthogonal à la fois à D_1 et D_2 .
 b. (0.25) Donner l'équation du plan π_1 contenant D_1 tel que $\vec{u} // \pi_1$.
 c. (0.25) Donner l'équation du plan π_2 contenant D_2 tel que $\vec{u} // \pi_2$.
 d. (0.25) Vérifier que la droite $D = \pi_1 \cap \pi_2$ est perpendiculaire commune à D_1 et D_2 .
 e. (0.25) En déduire $d(D_1, D_2)$.
3. (0.5) Soit $M \in \mathbb{R}^3$, Δ une droite passant par un point A dirigée par un vecteur \vec{u} montrer que $d(M, \Delta) = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$
4. Reconnaître les équipotentielle de \mathbb{R}^3 définie par :
- a. (0.75) $\vec{AM} \wedge \vec{BM} = \vec{u}$ où A, B deux points et \vec{u} vecteur de \mathbb{R}^3 fixes.
 b. (0.25) Application numérique : $A(1, 2, -1), B(1, 0, 1), \vec{u}(2, 1, 1)$
 c. (1pt) $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + k\vec{MC}\| = \|\vec{MD} + \vec{ME}\|$ où A, B, C, D, E 5 points de l'espace et k réel donné

5. ..

- a. (0.5) Soit (γ) cercle du plan M un point et Δ une droite passant par M coupant (γ) en A et B , montrer que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = C^{te}$ qui ne depend pas du choix de Δ , on appelle cette constante puissance de M par rapport à (γ) et on la note $P_{(\gamma)}(M)$
- b. Reconnaître les ensembles:
- i. (0.25) $\{M \in \mathbb{R}^2 / P_{(\gamma)}(M) > 0\}$
 ii. (0.25) $\{M \in \mathbb{R}^2 / P_{(\gamma)}(M) = 0\}$
 iii. (0.25) $\{M \in \mathbb{R}^2 / P_{(\gamma)}(M) < 0\}$
- c. Soit $(\gamma), (\gamma')$ deux cercles de centre respectifs Ω, Ω' et de rayons respectifs R et R' ; on dit qu'ils sont orthogonaux ssi $\Omega\Omega'^2 = R^2 + R'^2$, montrer dans ce cas que:

- i.** (0.25) $(\gamma) \cap (\gamma') \neq \emptyset$
- ii.** (0.25) si $A \in (\gamma) \cap (\gamma')$ alors $\widehat{\Omega A \Omega'} = \frac{\pi}{2}$
- d.** (0.25) Si $(\gamma) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, $(\gamma') : x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$ montrer que $(\gamma), (\gamma')$ sont orthogonaux ssi $2(aa' + bb') = c + c'$
- e.** (0.25) Soit $(\gamma) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ un cercle ; $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ deux points distincts , on dit qu'ils sont conjugués ssi le cercle de diamètre $[M_1, M_2]$ est orthogonal a (γ) , montrer alors que : $x_1x_2 + y_1y_2 - a(x_1 + x_2) - b(y_1 + y_2) + c = 0$
- f.** (0.5) Soit $M \in \mathbb{R}^2$, (γ) un cercle de centre $\Omega \neq M$ montrer que l'ensemble des conjugués de M par rapport a (γ) est une droite $\Delta \perp \overrightarrow{\Omega M}$, Δ s'appelle polaire de M et M pole de Δ par rapport a (γ)
- g.** (0.25) Si $M(x_0, y_0)$ et $(\gamma) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ donner l'équation de Δ
- h.** Soit (γ) cercle de centre Ω et de rayon R passant par l'origine ;
 $\Delta : x = a; \theta = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{O\Omega} \right)$
- i.** (0.5) Donner l'équation de (γ) en fonction de R et θ
- ii.** (0.25) Soit $M(x_0, y_0)$ donner l'équation de la polaire de M par rapport a (γ)
- iii.** (0.5) En deduire une CNS pour que M soit pole de Δ par rapport a (γ)
- 6.** Soit $A(1, 0, 1), B(2, 1, 2), D = (AB), \pi$ plan perpendiculaire a D passant par A
- a.** (0.5) Donner l'expression analytique de la projection orthogonale sur D
- b.** (0.5) Donner l'expression analytique de la projection orthogonale sur π
- c.** (0.75) Donner l'expression analytique de la rotation d'axe D d'angle $\frac{2\pi}{3}$
- d.** (0.5) Soit $C(-1, 1, -1)$ donner l'équation cartésienne de $r_{D, \frac{2\pi}{3}}(AC)$ puis donner les angles entre D et (AC) puis D et $r_{D, \frac{2\pi}{3}}(AC)$