



d. Dresser le tableau de variation de  $A$ .

En déduire que  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

e. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

3. On considère l'application

$$B : ]0; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto B(x) = -\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2 \ln(1+x).$$

a. Montrer que  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$ , et que, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}$ .

b. Dresser le tableau de variation de  $B$ .

En déduire que  $f$  est convexe sur  $]0; +\infty[$ .

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ .

## Partie II

### Un développement en série

1. Montrer, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et tout  $t \in [0; 1]$  :

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

2. En déduire, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0; 1]$  :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

où on a noté  $J_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} dt.$

3. Établir, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0; 1]$  :  $|J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}.$

4. En déduire que, pour tout  $x \in [0; 1]$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$  converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

## Partie III

### Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1. Montrer, en utilisant le résultat de **II.3.**, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0; 1]$  :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

2. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$  converge et que :  $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$

3. Montrer, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2} \\ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}. \end{cases}$$

4. On admet que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Montrer :  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi^2}{12}$ .

### Partie IV

#### Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note  $F : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t) dt$

et  $G : ]0; +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto G(x, y) = F(xy) - F(x) - F(y)$ .

1. Montrer que  $G$  est de classe  $C^2$  sur  $]0; +\infty[^2$ .

Exprimer, pour tout  $(x, y) \in ]0; +\infty[^2$ , les dérivées partielles premières et secondes de  $G$  en  $(x, y)$  en fonction de  $x, y, f(x), f(y), f(xy), f'(x), f'(y), f'(xy)$ .

2. Établir que  $G$  admet  $(1, 1)$  comme unique point critique.

3. Est-ce que  $G$  admet un extremum local ?

## DEUXIÈME PROBLÈME

On note  $n$  un nombre entier fixé supérieur ou égal 2,  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  et  $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$  la base canonique de  $E$ .

### Partie I

#### Étude d'un endomorphisme de $E$

1. Montrer que, pour tout polynôme  $P$  de  $E$ , le polynôme  $((X^2-1)P)''$  est élément de  $E$ , où  $((X^2-1)P)''$  désigne le polynôme dérivée seconde de  $(X^2-1)P$ .

On note  $\phi : E \rightarrow E$  l'application qui, à tout polynôme  $P$  de  $E$ , associe  $\phi(P) = ((X^2-1)P)''$ .

2. Vérifier :  $\phi(1) = 2$ ,  $\phi(X) = 6X$ .

3. Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $E$ .

4. Calculer  $\phi(X^k)$  pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$  et écrire la matrice  $A$  de  $\phi$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

5. a. Montrer que  $\phi$  admet  $n + 1$  valeurs propres deux à deux distinctes que l'on notera  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  avec  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ .  
b. Est-ce que  $\phi$  est bijectif ?  
c. Montrer que  $\phi$  est diagonalisable et déterminer, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , la dimension du sous-espace propre de  $\phi$  associé à  $\lambda_k$ .
6. Soient  $k \in \{0, \dots, n\}$  et  $P$  un vecteur propre de  $\phi$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$ .  
a. Montrer que le degré du polynôme  $P$  est égal à  $k$ .  
b. Montrer que le polynôme  $Q$  défini par  $Q(X) = P(-X)$  est un vecteur propre de  $\phi$  associé à  $\lambda_k$ .
7. En déduire qu'il existe une unique base  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $\phi$  telle que, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $P_k$  est un polynôme de degré  $k$ , de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant  $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$ .  
Que peut-on en déduire sur la parité de  $P_k$  ?
8. Calculer  $P_0, P_1, P_2, P_3$ .

## Partie II

### Un produit scalaire sur $E$

1. Montrer que l'application :  $(P, Q) \mapsto (P | Q) = \int_{-1}^1 (1 - x^2)P(x)Q(x) dx$  est un produit scalaire sur  $E$ .

On munit dorénavant  $E$  de ce produit scalaire noté  $(. | .)$ .

2. a. À l'aide d'intégrations par parties, établir que  $\phi$  est un endomorphisme symétrique de  $E$ .  
b. Montrer que la base  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  de  $E$  obtenue à la question I.7 est orthogonale.

Soit  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

3. a. Montrer que pour tout polynôme  $S$  de degré inférieur ou égal à  $j - 1$ , on a :  $(S | P_j) = 0$ .  
b. En considérant  $(1 | P_j)$ , montrer que  $P_j$  ne garde pas un signe constant sur l'intervalle  $] - 1 ; 1[$ .  
c. En déduire que  $P_j$  admet au moins, dans l'intervalle  $] - 1 ; 1[$ , une racine d'ordre de multiplicité impair.
4. On note  $\{x_1, \dots, x_m\}$  l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de  $P_j$  appartenant à l'intervalle  $] - 1 ; 1[$  et  $S_m = (X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_m)$ .  
a. Justifier :  $m \leq j$ .  
b. Montrer que le polynôme  $S_m P_j$  (produit des polynômes  $S_m$  et  $P_j$ ) garde un signe constant sur l'intervalle  $] - 1 ; 1[$ .  
c. En considérant  $(S_m | P_j)$ , montrer que  $m = j$ .  
d. En déduire que  $P_j$  admet  $j$  racines simples réelles toutes situées dans l'intervalle  $] - 1 ; 1[$ .

