d. Dresser le tableau de variation de A.

En déduire que f est strictement décroissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

e. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On considère l'application

$$B : \left[0\,;+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\,\ln(1+x).$$

a. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$, et que, pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$, $f''(x) = \dfrac{B(x)}{x^3}$.

b. Dresser le tableau de variation de B.

En déduire que f est convexe sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II
Un développement en série

1. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \left[0\,;1\right]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k\, t^k + \frac{(-1)^{N+1}\, t^{N+1}}{1+t}.$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left[0\,;1\right]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

où on a noté $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{N+1}\, t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$

3. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left[0\,;1\right]$: $\quad |J_N(x)| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.

4. En déduire que, pour tout $x \in \left[0\,;1\right]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n}.$$

Partie III
Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1. Montrer, en utilisant le résultat de **II.3.**, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left[0\,;1\right]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\quad \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$

3. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}. \end{cases}$$

4. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$ Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}\cdot$

Partie IV

Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $F \;:\; \left]0\,;+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

et $G \;:\; \left]0\,;+\infty\right[^2 \longrightarrow \mathbb{R},\quad (x,y) \longmapsto G(x,y) = F(xy) - F(x) - F(y).$

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $\left]0\,;+\infty\right[^2$.
Exprimer, pour tout $(x,y) \in \left]0\,;+\infty\right[^2$, les dérivées partielles premières et secondes de G en (x,y) en fonction de x, y, $f(x)$, $f(y)$, $f(xy)$, $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(xy)$.

2. Établir que G admet $(1\,,1)$ comme unique point critique.

3. Est-ce que G admet un extremum local ?

Deuxième problème

On note n un nombre entier fixé supérieur ou égal 2, E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B} = (1,\, \mathrm{X},\, \dots, \mathrm{X}^n)$ la base canonique de E.

Partie I

Étude d'un endomorphisme de E

1. Montrer que, pour tout polynôme P de E, le polynôme $\big((\mathrm{X}^2-1)P\big)''$ est élément de E, où $\big((\mathrm{X}^2-1)P\big)''$ désigne le polynôme dérivée seconde de $(\mathrm{X}^2-1)P$.

On note $\phi \;:\; E \longrightarrow E$ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe $\phi(P) = \big((\mathrm{X}^2-1)P\big)''$.

2. Vérifier : $\phi(1) = 2,\quad \phi(\mathrm{X}) = 6\mathrm{X}$.

3. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.

4. Calculer $\phi(\mathrm{X}^k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ et écrire la matrice A de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.

5. **a.** Montrer que ϕ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes que l'on notera $\lambda_0,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.

   b. Est-ce que ϕ est bijectif ?

   c. Montrer que ϕ est diagonalisable et déterminer, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, la dimension du sous-espace propre de ϕ associé à λ_k.

6. Soient $k \in \{0, \dots, n\}$ et P un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k.

   a. Montrer que le degré du polynôme P est égal à k.

   b. Montrer que le polynôme Q défini par $Q(\mathrm{X}) = P(-\mathrm{X})$ est un vecteur propre de ϕ associé à λ_k.

7. En déduire qu'il existe une unique base $(P_0,\ P_1, \dots,\ P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de ϕ telle que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, P_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-\mathrm{X}) = (-1)^k P_k(\mathrm{X})$.
   Que peut-on en déduire sur la parité de P_k ?

8. Calculer $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3$.

Partie II

Un produit scalaire sur E

1. Montrer que l'application : $(P, Q) \longmapsto (P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2) P(x) Q(x)\, \mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E.

On munit dorénavant E de ce produit scalaire noté $(.\,|\,.)\cdot$

2. **a.** À l'aide d'intégrations par parties, établir que ϕ est un endomorphisme symétrique de E.

   b. Montrer que la base $(P_0,\ P_1, \dots,\ P_n)$ de E obtenue à la question **I.7** est orthogonale.

Soit $j \in \{1, \dots, n\}$.

3. **a.** Montrer que pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à $j-1$, on a : $(S \mid P_j) = 0$.

   b. En considérant $(1 \mid P_j)$, montrer que P_j ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $]-1;1[$.

   c. En déduire que P_j admet au moins, dans l'intervalle $]-1\,;1[$, une racine d'ordre de multiplicité impair.

4. On note $\{x_1, \dots, x_m\}$ l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de P_j appartenant à l'intervalle $]-1\,;1[$ et $S_m = (\mathrm{X} - x_1)(\mathrm{X} - x_2)\cdots(\mathrm{X} - x_m)$.

   a. Justifier : $m \leqslant j$.

   b. Montrer que le polynôme $S_m P_j$ (produit des polynômes S_m et P_j) garde un signe constant sur l'intervalle $]-1\,;1[$.

   c. En considérant $(S_m \mid P_j)$, montrer que $m = j$.

   d. En déduire que P_j admet j racines simples réelles toutes situées dans l'intervalle $]-1\,;1[$.

★ ★ ★